

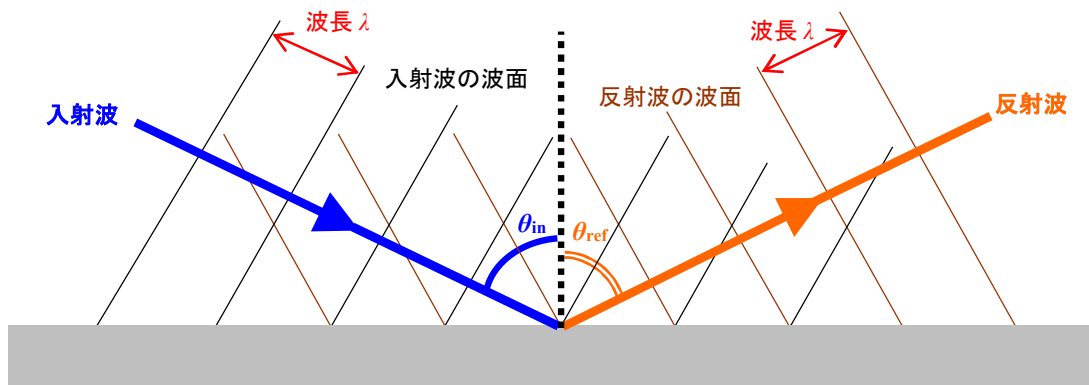
11-8. 反射と屈折

「11-5 反射波と透過波」では、波が異なる媒質に入射波としてぶつかると、境界から反射する反射波と境界を通過して別な媒質を進む透過波ができることを学んだ。また、境界に斜めに入射すると透過波の進む向きは、入射波の進行方向とは違う向きに進むことが観察される。つまり、波の進む経路が折れ、屈折する。このため、透過波は**屈折波**とも呼ばれる。この節では、入射波と反射波、屈折波の関係について調べる。

・反射(Reflection)

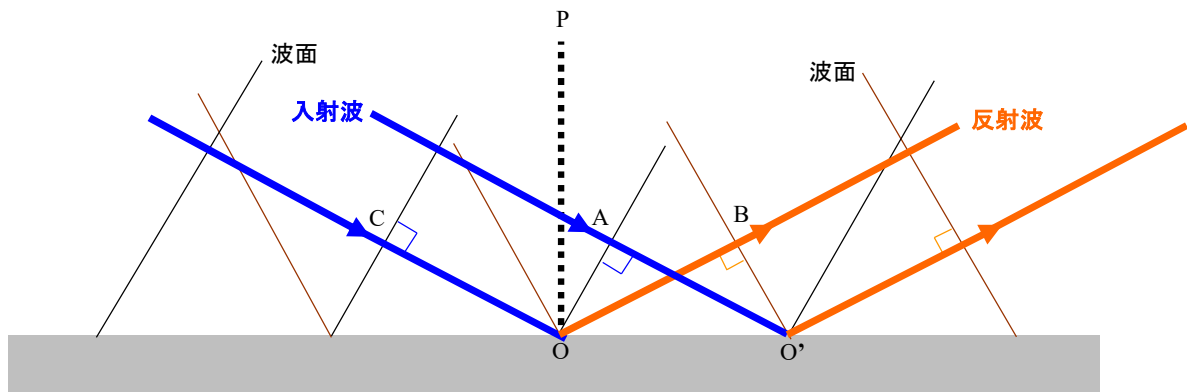
波が入射波として、媒質の違う物質にぶつかるとその境界で反射波が発生する。境界が自由端となる場合、入射波の山が境界に入射すると、山となる反射波ができる。したがって、入射波の周波数 f (単位時間当たりに境界にぶつかる波の山の数)と反射波の周波数 f は等しい。境界が固定端となる場合、入射波の山が境界に入射すると、谷となる反射波ができるが、ここでも、入射波の周波数(単位時間当たりに境界にぶつかる波の山の数)と反射波の周波数(単位時間当たりに境界から出る波の谷の数)は等しい。一方、波の進む速さは媒質と波の性質によって決まるので、入射波と反射波は進行方向だけが異なり、同じ種類の波で同じ媒質を進むので、入射波と反射波の進む速さ v は等しい。さらに、(11-2-5)式($v=f\lambda$)から2つの波の波長 λ も等しい。

下の図に、矢印で入射波と反射波の進む向きを、波長 λ の間隔で波面(山)を描いた¹⁰³。波の進む向きと波面は直交する。さらに、境界面の垂直方向からの入射波の進行方向の角度 θ_{in} (この角度を**入射角**と呼ぶ。入射角は「 i 」で表すこともある)と境界面の垂直方向から反射波の進行方向の角度の角度 θ_{ref} (この角度を**反射角**と呼ぶ。反射角は「 r 」で表すこともある)を示した。



入射波と反射波では、上に示したように周波数、波の速さ、波長は共に同じ値をとるので、左右対称な図形となる。したがって、入射角と反射角も下の式のように等しい。

$$\theta_{in} = \theta_{ref} \quad (11-8-1)$$



¹⁰³ この図では透過波を省略しており、図示していない。また、境界での反射波は自由端反射によって生じるものと仮定した。この場合、入射波と反射波の間に位相のずれはない(入射波が山で境界に衝突するなら、反射波も山として反射する)ものとして描いた。固定端反射の場合は位相が π ずれる(入射波が山なら反射波は谷となる)。

上の関係式は「**反射の法則**」とも呼ばれる。この関係式を上図を用いて確認する。

波面と波面間の距離は波長 λ で入射波と反射波で変わらない。上の図では入射角 $\theta_{in} = \angle POC$ で、反射角 $\theta_{ref} = \angle POB$ となる。

2つの直角三角形 $AO'O$ と BOO' を考える。三角形 $AO'O$ では、 $90^\circ = \angle AOP + \angle POC = \angle POA + \angle AOO'$ が成り立つので、 $\angle AOO' = \angle POC = \theta_{in}$ が成立する。三角形 BOO' では、 $90^\circ = \angle POB + \angle BOO' = \angle BOO' + \angle BOO'$ が成り立つので、 $\angle BOO' = \angle POB = \theta_{ref}$ が成立する。三角形 $AO'O$ と三角形 BOO' では、辺 OO' が共通で、 $O'A = BO = \lambda$ 、 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ なので2つの三角形は左右対称となる。したがって、 $\angle AOO' = \angle BOO'$ が成立し、「 $\theta_{in} = \theta_{ref}$ 」が確認できる。

・屈折(Refraction)

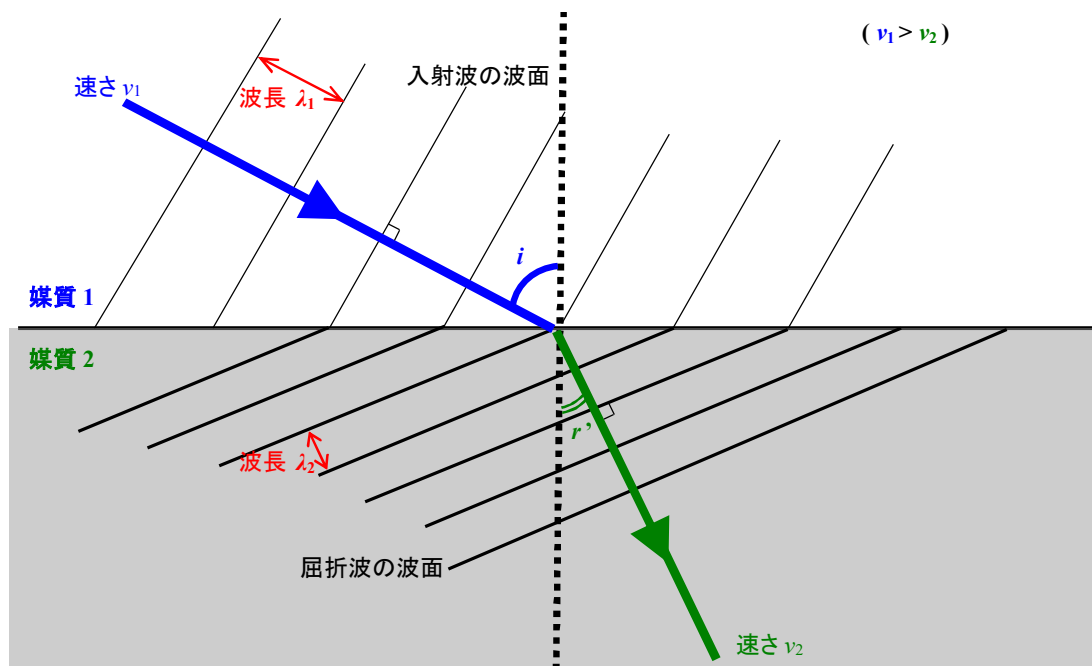
媒質1を進んでいた波が入射波として、媒質1と媒質2の境界にぶつかり透過波が発生する。媒質2を透過波が進む場合を考えてみよう。波が進む速さは媒質の違いによるので、媒質1での波の速さを v_1 、媒質2での波の速さを v_2 とする。入射波の波面が1個、境界面にぶつかることによって1個の透過波の波面が生じる。したがって、入射波の周波数 f_1 と透過波の周波数 f_2 は等しい($f_1 = f_2 = f$)。さらに、(11-2-5)式の $v = f\lambda$ より、波長はそれぞれ異なる値をとり、媒質1での波長を λ_1 、媒質2での波長を λ_2 とすると下の式が成り立つ。

$$v_1 = f\lambda_1 \tag{11-8-2}$$

$$v_2 = f\lambda_2 \tag{11-8-3}$$

波面は入射波と透過波では、下の図のように境界でつながっている。境界にぶつかる前とぶつかった後では波の伝わる速さが異なるので、波の速さが速い媒質(媒質1)から遅い媒質(媒質2)に波が入射すると¹⁰⁴、波の進む速さが遅い媒質に入ると、(速い媒質と比べて)同じ時間では進む距離がより小さくなるので(波長も短くなる)、透過波の進む向きが変わる。このような、波の進む向きが変更を受ける現象を波の**屈折**と呼ぶ。屈折して、進路が変更された透過波を**屈折波**と呼ぶ。なお、下の図では反射波は省略している。

反射の場合と同じように、境界面の垂直方向から入射波の進行方向の角度を入射角 θ_{in} (または「 i 」)と呼ぶ。また、境界面の垂直方向から、屈折波の進行方向の角度を屈折角 θ'_{ref} (または「 r' 」)で表す。

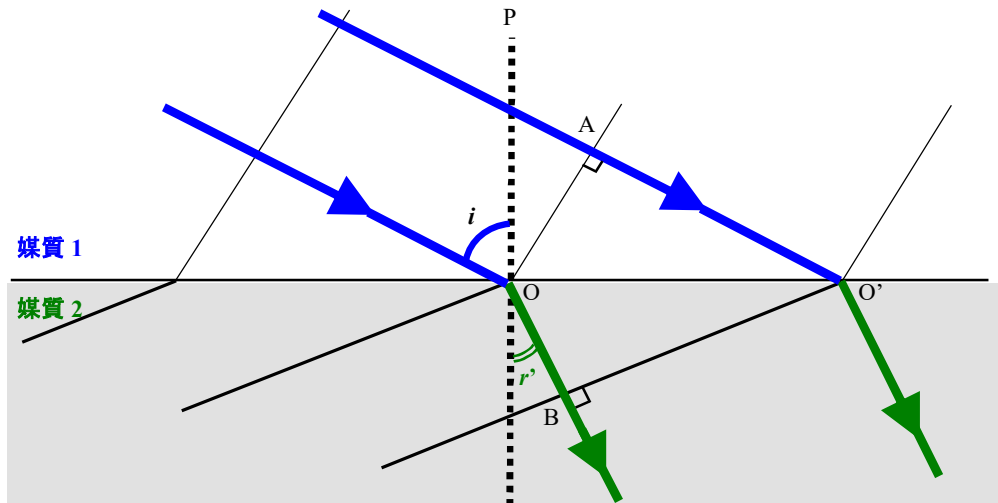


¹⁰⁴ この図で書いたように屈折する場合は、 $v_1 > v_2$ となる。また、屈折波は入射波に対して、位相のずれは生じない。

媒質 1 から入った入射波が境界で屈折し、媒質 2 で屈折波となって波が出て進行する場合、下の式のように、波の進む速さの比を用いて**屈折率** $n_{1 \rightarrow 2}$ を定義する¹⁰⁵。

$$n_{1 \rightarrow 2} = v_1 / v_2 \quad (11-8-4)$$

上の式は入射角 i と屈折角 r' を用いて別に表すことができる。上の図を下に拡大し、2 つの直角三角形 $AO'O$ と BOO' を考えよう。



$O'A$ は媒質 1 で 2 つの波面の間の距離であるから波長 λ_1 である ($O'A = \lambda_1$)。同様に、 $OB = \lambda_2$ となる。さらに、 $90^\circ = i + \angle POA = \angle AOO' + \angle AO'O$ 、 $90^\circ = r' + \angle BOO' = \angle BO'O + \angle BO'O$ より、 $\angle AOO' = i$ 、 $\angle BO'O = r'$ となり、下の式が成り立つ。

$$\sin i = \frac{O'A}{OO'} = \frac{\lambda_1}{OO'} \quad (11-8-5)$$

$$\sin r' = \frac{OB}{OO'} = \frac{\lambda_2}{OO'} \quad (11-8-6)$$

したがって、(11-8-4)式の定義式より、屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ について、下の関係式が成り立つ。この式は、「**屈折の法則**」、または「**スネルの法則**」と呼ばれる(いずれも、**分子が入射波の速さ、波長、入射角の正弦**となっている)。

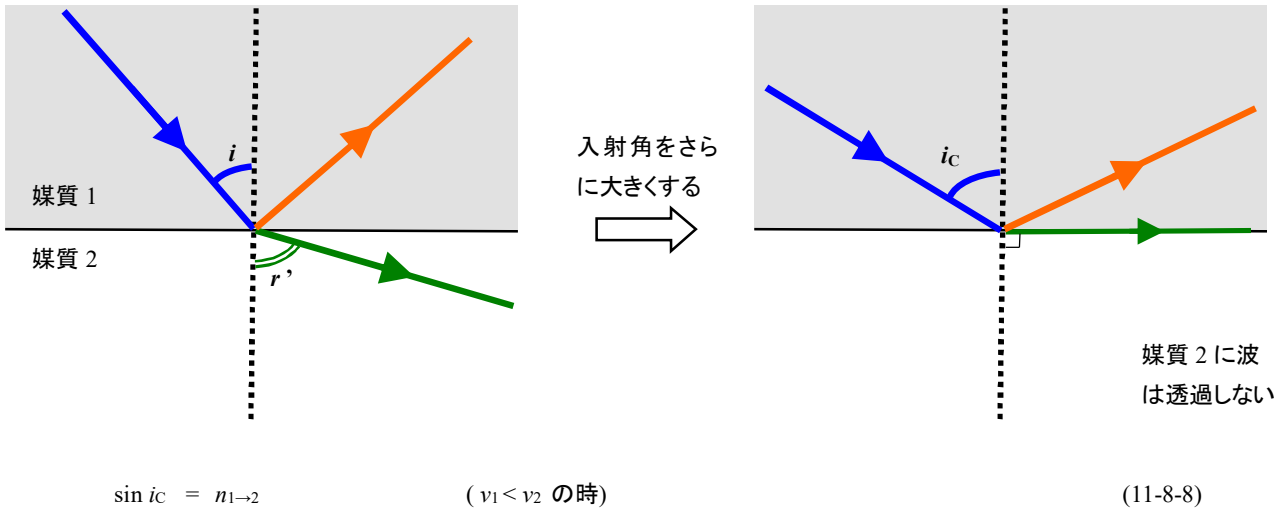
$$n_{1 \rightarrow 2} = v_1 / v_2 = (f\lambda_1) / (f\lambda_2) = \lambda_1 / \lambda_2 = \sin i / \sin r' \quad (11-8-7)$$

入射角 i 、屈折角 r' は、 $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ 、 $0^\circ \leq r' \leq 90^\circ$ で、この範囲ではサイン関数は単調増加関数となる。したがって、速さの大小関係として $v_1 > v_2$ となる場合、 $i > r'$ が成り立つ。つまり、速さの大きい媒質において、入射角(または屈折角)がより大きな値となり、波の進行方向が変化し、波の進行経路が折れて、屈折現象が起きる。

・臨界入射角

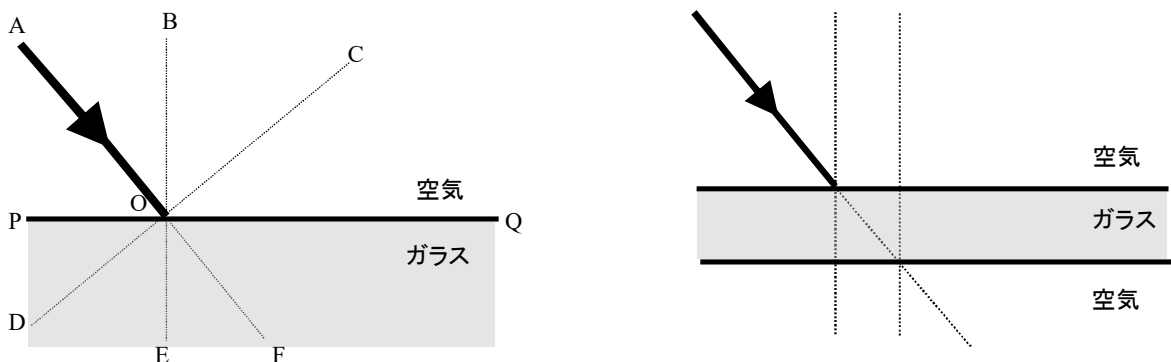
¹⁰⁵ この屈折率を、「**媒質 1 に対する媒質 2 の屈折率**」と呼ぶ。

波の速さが遅い媒質 1 からより速い媒質 2 へ波が入射する場合($v_1 < v_2$)を考えよう。この場合, (11-8-7)式より, 入射角 i より屈折角 r' の方が大きく($i < r'$)なる。さらに, 少しずつ入射角 i を大きくしていくと, ついに屈折角 r' は 90° となる状況が発生する(この状況を下の図に示した)。さらに, これよりも入射角を大きくすると, 媒質 2 を透過する透過波(屈折波)が生じないで, 反射波のみとなる現象が発生する。このような状態を「**全反射**」と呼ぶ。屈折角 $r' = 90^\circ$ となる時の入射角を**臨界入射角** i_c ¹⁰⁶と呼び, (11-8-7)式より, 下の関係式が成立する。



問11-8-1. 空気中で, 速さ $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, 波長 $\lambda = 8000 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ m)の光が, ガラスに入射したときの屈折率 $n = 1.50$ であった。

- 1) ガラスの中での光の速さ v_2 , 波長 λ_2 , 周波数 f_2 を求めよ。
- 2) 下の左の図のように空気から水中に光が入射するとき, 反射光を点線の矢印で, 屈折光を実線の矢印でその軌跡をかけ。(ただし, この図で, $\angle POA = \angle AOB = \angle BOC = \angle COQ = \angle POD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOQ = 45^\circ$ である)
- 3) 下の左図で入射角 i はどれか? $\angle POA$ のように答えよ。
- 4) 屈折角 r' は何度になるか(電卓か三角関数表を用いる)。
- 5) 光はガラスを抜けて再び空気にてたとする。このときの光の軌跡を実線で書け(ガラスと空気の2つの境界は平行)。
- 6) 今度はこの光をガラスから空気へ入射させた。そのとき, 臨界入射角 i_c を求めよ(電卓か三角関数表を用いる)。

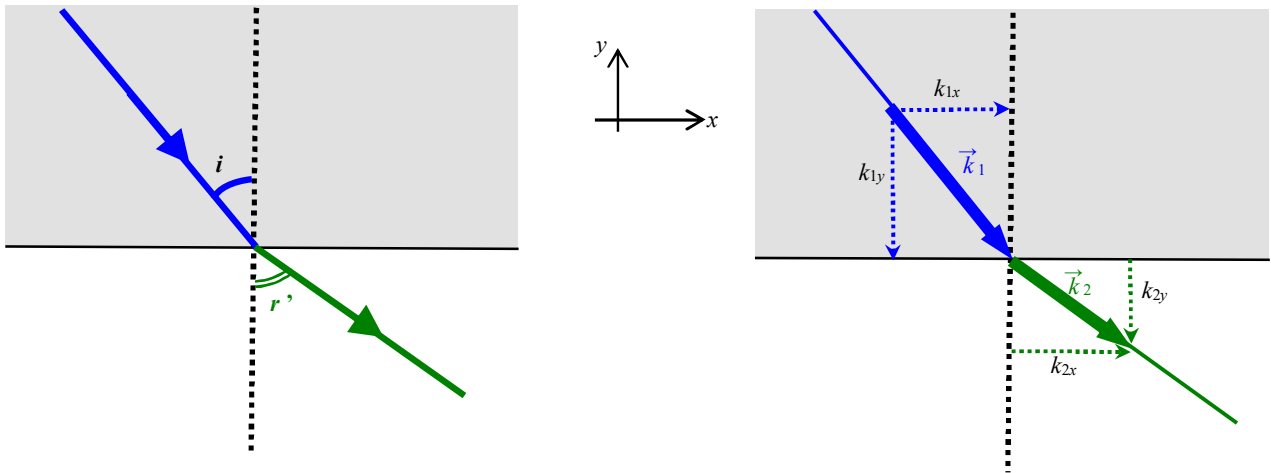


問 12-1-2. 上の屈折の図で波の波数ベクトルを考える。媒質 1 での波の波数ベクトル $\vec{k}_1 = (k_{1x}, k_{1y})$ は波の進む向きでその大きさ $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ である。同様に, 媒質 2 での波の波数ベクトル $\vec{k}_2 = (k_{2x}, k_{2y})$ を導入する(波数ベクトルの大きさ $k_2 = 2\pi/\lambda_2$)。

- 1) 入射角 i と波長 λ_1 を用いて, k_{1x} を表せ。

¹⁰⁶ 添え字の「C」は臨界(Critical)の意味である。

- 2) 屈折角 r' と波長 λ_2 を用いて, k_{2x} を表せ.
- 3) 屈折率を表す式, (11-8-7)式を使って, k_{1x} と k_{2x} の関係を求めよ.



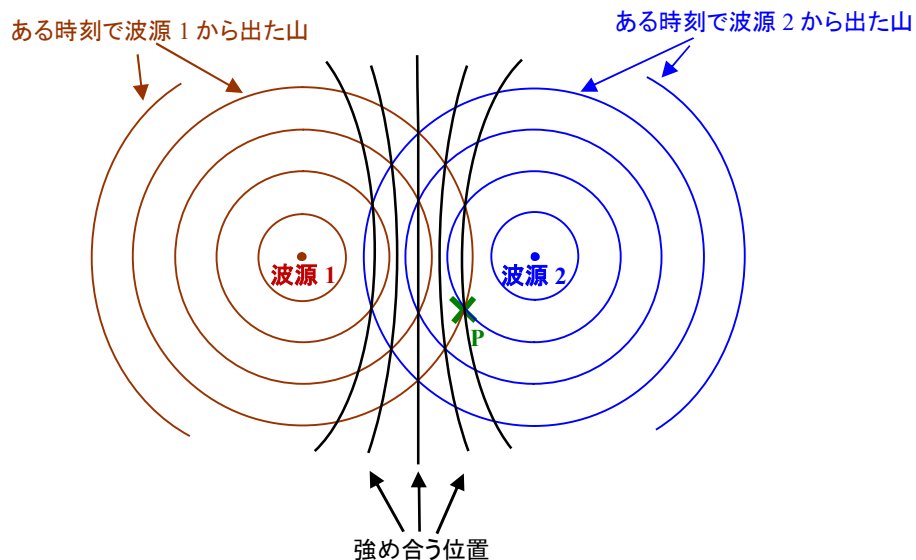
問 11-8-1. 境界面が平行な 3 つの媒質がある. 媒質 1~3 での波の速さをそれぞれ, v_1, v_2, v_3 ($v_1 > v_2 > v_3$) とする.

- 1) 波が媒質 1 → 媒質 2 → 媒質 3 と通過する場合, 媒質 1 と媒質 2 境界へ入射する入射波の入射角を i_1 とすると, 媒質 2 と媒質 3 の境界から出てくる屈折波の屈折角 r'_3 を求めよ. また, 媒質 2 と媒質 3 の境界に入射する入射波の入射角 i_2 を求めよ.
- 2) 媒質 2 を取り除いて, 波が媒質 1 → 媒質 3 と通過する場合, 媒質 1 と媒質 3 の境界へ入射する入射波の入射角 $\theta_{in,1}$ を用いて媒質 1 と媒質 3 の境界から出てくる屈折波の屈折角 $\theta_{ref,3}$ を求めよ.

11-9. 波の干渉(Interference)

2 つの以上の波がぶつかると, お互いに影響しあい, 1 つの波だけがある状態と異なる現象が現れる. この現象を**波の干渉**と呼ぶ. 波の干渉は複数の波が「**重ね合わせの法則**」にしたがって合成された結果, 生じる現象である.

例えば, 水面上の異なる波源(波源 1 と波源 2)から同じタイミング¹⁰⁷(同時刻に山が発生する)で球面波 y_1 と y_2 が発生する場合を考えよう. 波が干渉する結果, 媒質が激しく振動する場所と全く振動しない場所が交互に表れ, これらの場所は移動しないことが観測される. 下の図はある時刻において, 波源 1 及び波源 2 から出た山を同心円で表し, 実線は干渉によって強めあっている位置を結んだものである.



¹⁰⁷ この場合を「**同位相**」で波が発生しているという.

例えば、上の図で波が干渉して強め合う位置にある点 P は波源 1 からの距離 r_1 が 4λ で波源 2 からの距離 r_2 が 2λ となり、2 つの波源からの距離の差 $(r_1 - r_2) = 2\lambda$ となる。これを一般化し、他の強め合い位置を考えると、任意の位置で波が強め合うための条件式は、下のように 2 つの波源からの距離の差 $(r_1 - r_2)$ が波長 λ の整数倍となる。

$$r_1 - r_2 = m\lambda \quad (m \text{ は整数 ; } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{ただし, 同位相で波が発生した時}) \quad (11-9-1)$$

また、波が弱め合うのは山と谷がぶつかる位置となるので、下の式が成立する。

$$r_1 - r_2 = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (m \text{ は整数; } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{ただし, 同位相で波が発生した時}) \quad (11-9-2)$$

一方、2 つの波源から出る波のタイミングが半周期ずれた場合¹⁰⁸、強め合い位置と弱め合う位置は下の条件式が成り立つ。

$$r_1 - r_2 = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (\text{強め合う条件, } m \text{ は整数; ただし, 逆位相で波が発生した時}) \quad (11-9-3)$$

$$r_1 - r_2 = m\lambda \quad (\text{弱め合う条件, } m \text{ は整数; ただし, 逆位相で波が発生した時}) \quad (11-9-4)$$

* 干渉の条件式 (11-9-1) ~ (11-9-4) 式に対し、数式を用いて導出 ← 省略してよい

平面上にある波源 1 (波源の位置 $\vec{R}_1 = (X_1, Y_1)$) と波源 2 (波源の位置 $\vec{R}_2 = (X_2, Y_2)$) から出る 2 つの球面波の変位をそれぞれ y_1, y_2 と表す。波が広がることによる振幅の減衰を考えないである位置 $\vec{r} = (x, y)$ における波の変位のおおよその形として、それぞれ下の式のように正弦関数を用いて表すことができる。

$$y_1 \sim A \sin(\omega t - k r_1 + \theta_1) = A \sin(\omega t + \gamma_1) \quad (\gamma_1 = \theta_1 - k r_1 \text{ とした}) \quad (11-9-5)$$

$$y_2 \sim A \sin(\omega t - k r_2 + \theta_2) = A \sin(\omega t + \gamma_2) \quad (\gamma_2 = \theta_2 - k r_2 \text{ とした}) \quad (11-9-6)$$

ここで、 θ_1 と θ_2 は波 1 と波 2 の初期位相で、同位相なら $\theta_1 = \theta_2$ で、逆位相なら $\theta_1 = \theta_2 + (2n+1)\pi$ (n は整数) となる。さらに、波源 1 と波源 2 から位置 \vec{r} までの距離 r_1 と r_2 は下の式で表すことができる。

$$r_1 = \sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2} \quad (11-9-7)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2} \quad (11-9-8)$$

この 2 つの波での合成波の変位 y を重ね合わせの原理を適用させて計算すると、

$$y = y_1 + y_2$$

$$\sim A \sin(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}) + A \sin(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2})$$

¹⁰⁸ この場合を‘逆位相’で波が発生しているという(または、「位相が π ずれている」という)。

$$\begin{aligned}
&= A \left[\sin \left(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) - \cos \left(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sin \left(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) \right] \\
&= 2A \sin \left(\omega t + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) \tag{11-9-9}
\end{aligned}$$

上の式の1項目が時間変化する項で2項目が2つの波が合成したことによる干渉の効果を表す項である。
2つの波の合成波が強め合うための条件は、上の式の第2項が最大となる揺れ(±1)となるときである。

$$\begin{aligned}
\cos \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) = \pm 1 &\rightarrow \cos^2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) = 1 \rightarrow \frac{1}{2} (1 + \cos (\gamma_1 - \gamma_2)) = 1 \rightarrow \cos (\gamma_1 - \gamma_2) = 1 \\
\rightarrow -\gamma_1 + \gamma_2 = k (r_1 - r_2) - (\theta_1 - \theta_2) = 2m\pi &\quad (m \text{ は整数}) \tag{11-9-10}
\end{aligned}$$

同位相で波が発生する場合($\theta_1 = \theta_2$)は、波数 $k = 2\pi/\lambda$ なので下の式を満たす。

$$k (r_1 - r_2) = 2m\pi \rightarrow r_1 - r_2 = m\lambda \quad (m \text{ は整数}) \tag{11-9-11}$$

さらに、逆位相で波が発生する場合($\theta_1 = \theta_2 + (2n+1)\pi$; n は整数)は下の式を満たす

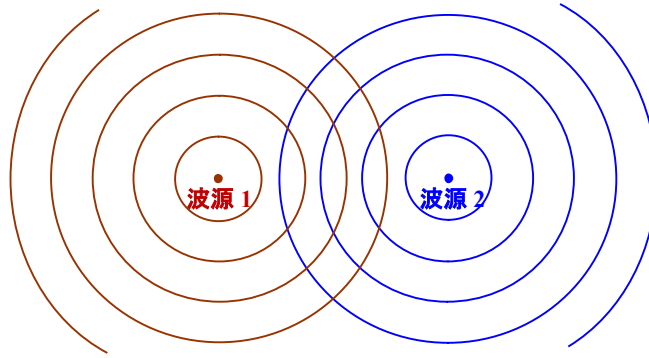
$$r_1 - r_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m \text{ は整数}) \tag{11-9-12}$$

これらの条件式は(11-9-1)式, (11-9-2)式と同じ結果である。このように数式を用いても干渉によって波が強め合う位置と弱め合う位置を求めることができる。

問 11-9-1. 同じ周波数で同位相となる音を出すスピーカーが2個ある。音速 $v = 330 \text{ m/s}$ とする。

- 1) スピーカーAとスピーカーBは両方、周波数 $f = 500 \text{ Hz}$ の音を出している。ある点Pで音の強弱を観測する。AP間の距離 $a = 3.0 \text{ m}$ の場合、点Pで音が強め合うためにはBP間の距離 b を何mとすれば良いか?(短い距離から3つ答えよ)。また、点Pで音が弱め合うためにはBP間の距離 b を何mとすれば良いか?(短い距離から3つ答えよ)。
- 2) スピーカーAとスピーカーBの間の距離 $L = 1.8 \text{ m}$ で、両方から、周波数 $f = 1000 \text{ Hz}$ の音を出している。2つのスピーカーを結んだ線分ABの間で音が強め合う点Pの点Aからの距離 a を求めよ(短い距離から3つ答えよ)。

問 11-9-2. 下の図は同位相で波長 λ の球面波が出ている図を示したものである。この時、弱め合う地点を線で結び、図に表せ。さらに右の空いたスペースには逆位相で球面波が出ている図を書き、その図に波が弱め合う線で結び表せ。



・ うなり

2つの波源から振動数 f_1 [Hz]と f_2 [Hz]の波が出ているとしよう。ある地点で2つの波源から発生した波の合成波を観察すると、合成波の強弱が単位時間当たり $|f_1 - f_2|$ 回、発生することが観測される。この強くなったり弱くなったりする現象を「うなり」と呼ぶ。「うなり」は2つの波源から出た波が時間的に干渉し、強弱を発生させる。

$$\text{単位時間当たりのうなりの回数} = |f_1 - f_2| \quad (11-9-13)$$

問 11-9-3.

- 1) 振動数 $f_1 = 450$ Hz と 振動数 $f_2 = 446$ Hz の音になる音源を同時に鳴らしたとき、うなりは毎秒何回聞こえるか?
- 2) 振動数 $f_A = 440$ Hz の音源 A, 振動数 $f_B = 446$ Hz の音源 B と振動数がわからない C の音源がある。音源 A と音源 C を鳴らしたところ、うなりは 1 秒間に 4 回発生した。また、音源 B と音源 C を鳴らしたところ、うなりは 1 秒間に 2 回発生した。音源 C の振動数 f_C を求めよ。

* うなりの条件式 (11-9-13)式に対し、数式を用いて導出 ← 省略してよい

波源 1 から、初期位相角 θ_1 , 角周波数 ω_1 , 波数 k_1 , 振幅 A の正弦波 y_1 が、波源 2 から、初期位相角 θ_2 , 角周波数 ω_2 , 波数 k_2 , 振幅 A の正弦波 y_2 がでているとする。波源 1 からの位置 x_1 と波源 2 からの位置 x_2 における合成波の変位 y は下の式のように計算することができる。

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x_1 + \theta_1) = A \sin(\omega_1 t + \gamma_1), \quad (\gamma_1 = \theta_1 - k_1 x_1 \text{ とした}) \quad (11-9-14)$$

$$y_2 = A \sin(\omega_2 t - k_2 x_2 + \theta_2) = A \sin(\omega_2 t + \gamma_2), \quad (\gamma_2 = \theta_2 - k_2 x_2 \text{ とした}) \quad (11-9-15)$$

$$y = y_1 + y_2 \quad (\text{ここで, } \omega = (\omega_1 + \omega_2)/2, \Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2), \gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2, \Delta\gamma = (\gamma_1 - \gamma_2) \text{ とした})$$

$$= A [\sin(\omega t + \gamma + \Delta\omega t/2 + \Delta\gamma/2) + \sin(\omega t + \gamma - \Delta\omega t/2 - \Delta\gamma/2)]$$

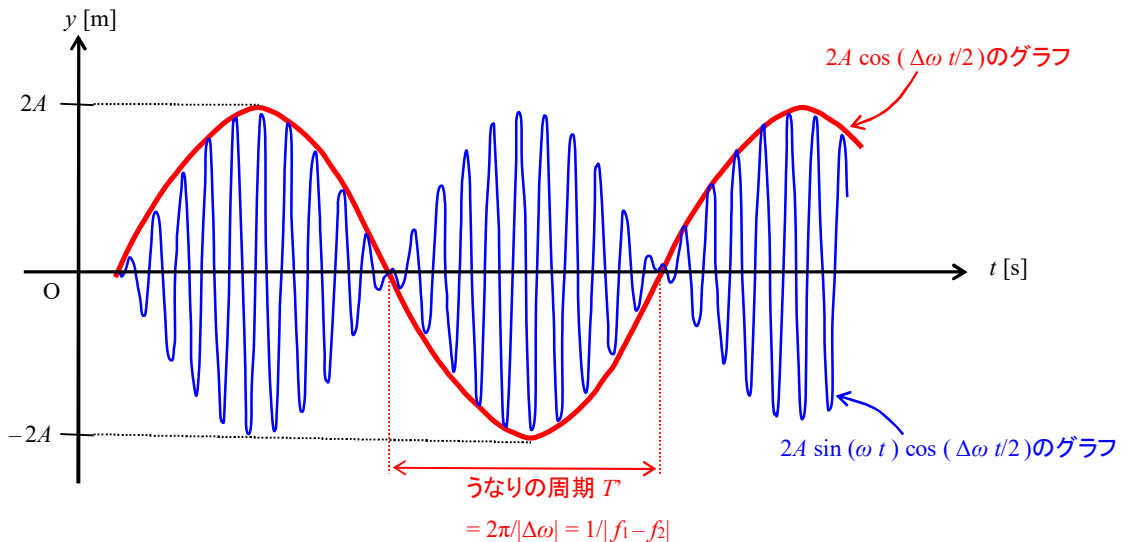
$$= 2A \sin(\omega t + \gamma) \cos(\Delta\omega t/2 + \Delta\gamma/2) \quad (11-9-16)$$

上の式は、同じ角周波数の波($\Delta\omega = 0$)が波源から出ている場合、「 $y \sim \sin(\omega t + \gamma) \cos(\Delta\gamma/2)$ 」となり、(11-9-9)式と同じになる($\Delta\gamma/2 = k(x_2 - x_1)/2 \rightarrow \beta$ ((11-9-9)式における位相角 β ($\theta_1 = \theta_2$ の場合)))。

(11-9-16)式において、位相角 γ_1, γ_2 を適当にとり、横軸を時刻 t 、縦軸を合成波の変位 y としたグラフを示す。青の実線が変位 $y \sim 2A \sin(\omega t) \cos(\Delta\omega t/2)$ で、赤の実線がその包絡線となる「 $2A \cos(\Delta\omega t/2)$ 」のグラフである。

うなりは、合成波の変位 y が 0 となる時間間隔で発生する。下の図で赤の包絡線が「0」となる時間間隔 T が、うなりが生じる時間間隔(うなりの周期)となり、コサイン関数の位相角部分が π となるときである ($|\Delta\omega T/2| = \pi$)。したがって、その時間間隔 $T' = 2\pi/|\Delta\omega| = 1/|f_1 - f_2|$ となる。単位時間当たりのうなりの回数は、時間間隔 T' の逆数となり、(11-9-13)式で表される。

$$\rightarrow \text{単位時間当たりのうなりの回数} = \frac{1}{T'} = |f_1 - f_2|$$



* 群速度 ← 省略してよい

時刻 t 、位置 x における正弦波の変位 y を表す(11-3-7)式において、波の進む速さ v を用いて表す。

$$y = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(k(vt - x)) \quad (11-9-17)$$

この正弦波が進む速さ v は位相速度(phase velocity) v_p と呼ばれ、角周波数 ω と波数 k を用いると、下の式で表すことができる。

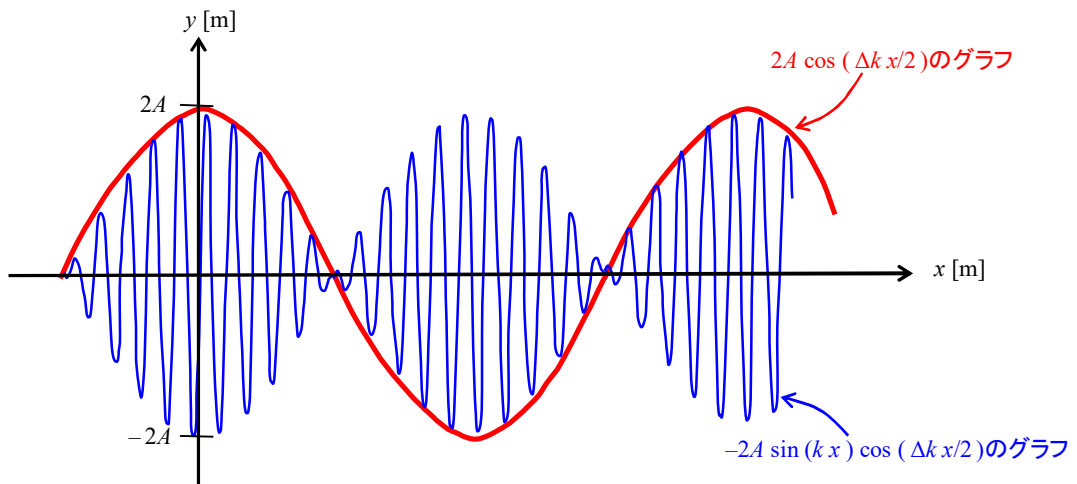
$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (11-9-18)$$

次に、(11-9-16)式で表された合成波を再び考えよう。2つの波源が近接している場合は、波源からの位置 $x_1 = x_2 = x$ とする。さらに、平均の波数 $k = (k_1 + k_2)/2$ 、波数の差 $\Delta k = (k_1 - k_2)$ とおくと、(11-9-16)式は下の式のように表すことができる(ここでは初期位相角 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ としたので、位相角 $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 = -(k_1 + k_2)x/2 = -kx$ 、 $\Delta\gamma = (\gamma_1 - \gamma_2) = -(k_1 - k_2)x = -\Delta kx$ となる)。

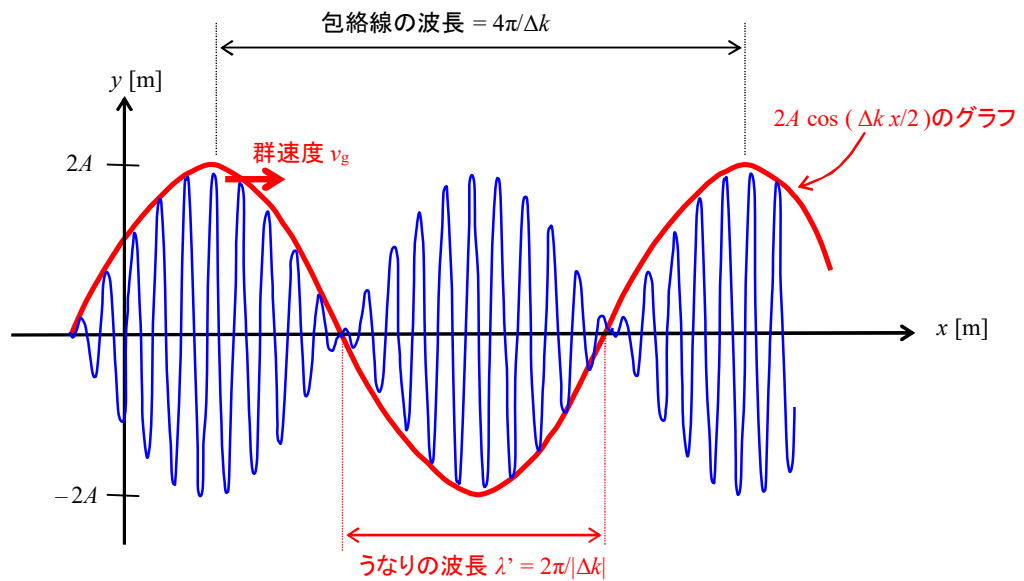
$$y = 2A \sin(\omega t - kx) \cos((\Delta\omega t - \Delta kx)/2) \quad (11-9-19)$$

上の式で表される合成波は、平均の角周波数 $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ 、平均の波数 $k = (k_1 + k_2)/2$ を持つ正弦波としての関数と角周波数の差の半分 $\Delta\omega/2$ 、波数の差の半分 $\Delta k/2$ を持つ余弦波としての関数の積となっている。(11-9-19)式に対し、時刻 $t = 0$ のときの波形を下のグラフに描いた。赤い実線が包絡線となる「 $2A \cos(\Delta kx/2)$ 」である。青い実線が「 $2A$

$\sin(\omega t - kx) \cos((\Delta\omega t - \Delta kx)/2)$ を示したもので、包絡線内で平均の波数 k で激しく振動している。



(11-9-19)式に従う合成波の時間発展を観測すると、包絡線となるコサイン関数が「 $\cos(\Delta kx/2)$ 」がある速度で移動することがわかる。下に時刻 $t=0$ から少しか時間経過した波形を図示する(ここでは、包絡線の進む速度を正とした)。



(11-9-19)式より、包絡線の波形(変位 y)が時間発展する式は、下の式で表すことができる。

$$y \sim \cos((\Delta\omega t - \Delta kx)/2) = \cos(\Delta k(v_g t - x)/2) \quad (11-9-20)$$

ここで、速度 v_g は群速度(group velocity)と呼ばれ、下の式で表すことができる。包絡線が x 方向に進む速度である。包絡線内では関数「 $\sin(\omega t - kx)$ 」で激しく振動するが、合成波全体を観察すると、群速度で動いているように見える

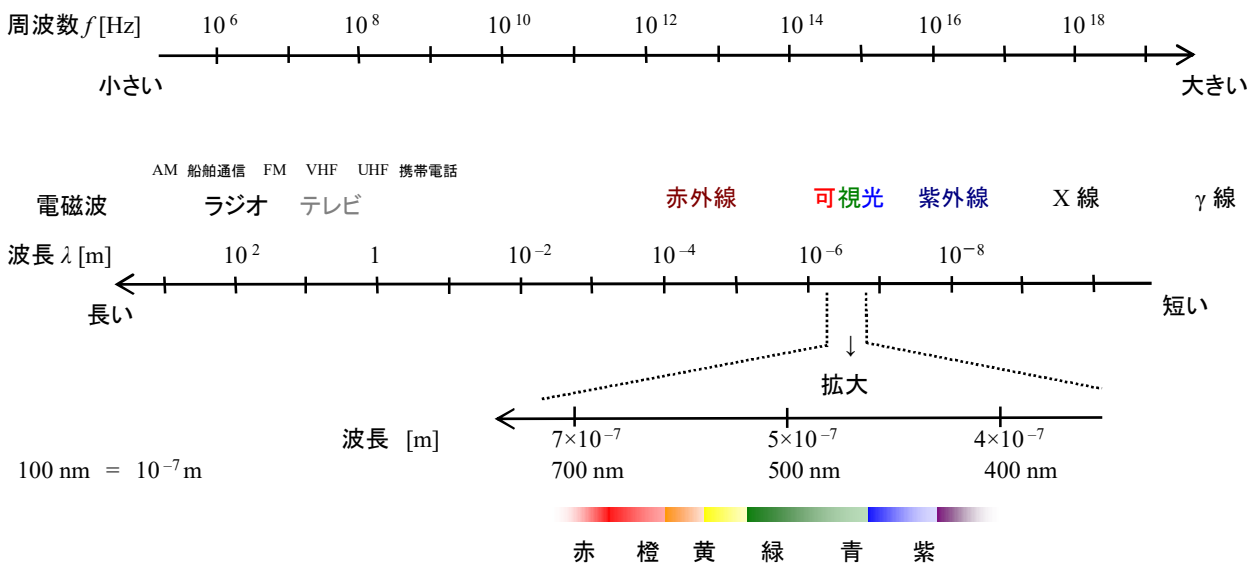
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (11-9-21)$$

12. 光と幾何光学

11章の「波」において、波の基本的な性質を学んだが、この章では、波の中でも特に「光」に注目し、**光の反射・屈折**、及び**干渉**について、復習することから始めよう。その後、屈折の法則を用いて光を集めたり、広げたりする器具としてのレンズの性質を調べ、レンズを用いた光の活用法(ここでは、光線を図形で描いてレンズによる縮小・拡大の方法)、すなわち「幾何光学」を学ぶ。

12-1. 光(Light)

光は電磁波の1種¹⁰⁹で、波¹¹⁰である。電磁波はその波長(周波数)によって呼び方が異なる。特に、人間の目に見える光を可視光と呼び、光の色の違いは電磁波の波長の違いによる。下に真空中の電磁波の波長(周波数)と電磁波の呼び名を示す。



真空中では、電磁波が進む速さはその波長によらず一定で、特別に記号‘ c ’で表す。現在の科学¹¹¹では、その値を下のように9桁の数値で定義している。さらに、「長さ 1 m」は別に定義した時間の単位(1 s)とこの真空中の光速の値を用いて定義される。

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (12-1-1)$$

物質中での電磁波の速さはこの値よりも遅くなり¹¹²、その値は媒質と波長(または、周波数)に依存する。人間の目も物質でできており、光を目の中にある分子が吸収し、光化学反応によって、ある物質が作られることで光の色を脳が感じとる。太陽や白熱灯の光は、多数の波長からなる多くの色を持つ光が混ざりあったもので、人間の目では多くの色の光が混合すると白色(透明)と感じる。また、レーザー光線はその波長が1つに限定された単色光である。さらに、レーザー光では波の初期位相がそろっている大きな強度(波の振幅の2乗)をもっている。

光は電磁波なので、波の変位としては、電場 \vec{E} に相当する。電磁波が平面波として三角関数で表現でき、 $+x$ 方向に伝搬すると仮定すると、位置 x 、時刻 t での電場 $\vec{E}(x, t)$ は、波の変位を表す式と同じように下の式のように表すことができる。ここで、波(光)の進む速さ $c = \omega/k$ で、初期位相 θ_0 とした。

¹⁰⁹ 電場と磁場がからまって相互に影響を及ぼし合いながら進んでいく波のこと。真空中でも電磁波は伝わるることができる。

¹¹⁰ したがって、もちろん、電磁波は波の性質を持っている。

¹¹¹ 標準単位系(SI単位系(フランス語で、Système International d'unités))では、真空中の光速と時間の単位 1 s(秒)を定義して、単位系を構成している。

¹¹² 空気中は媒質(酸素 O_2 と窒素 N_2)の濃度が薄いため、空気中での光の速さは真空中で値とほぼ同じになる。

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx + \theta_0) \quad (12-1-2)$$

電磁波は横波¹¹³で、電場 \vec{E} の向きは電磁波の進行方向(ここでは+x 方向とした)と垂直になる(ここでは、電場 \vec{E}_0 の向きは yz 平面の中のある向きとなる¹¹⁴)。もし、電場 \vec{E} の向きが y 方向のみであれば、電場 \vec{E} の y 成分 E_y は下の式で表すことができる。

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \theta_0) \quad (12-1-2)'$$

電磁波は、磁場 \vec{H} も上の式のように三角関数を用いて表すことができる。電磁波は電場と磁場が相互に影響し合いながら進むので、電場 \vec{E} の向きが y 方向なら、磁場 \vec{H} の向きは z 方向を向く(電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} は直交する)。白色光は複数の異なる波数 k (可視光領域内の波数)を持った電磁波の合成波である。また、光の強度(明るさ) I は、電場の大きさの 2 乗 $|\vec{E}|^2$ に比例する。ただ、光の周波数はとても高く、観測される光の強度は通常、これを時間平均したものとなる。

$$I(x, t) \sim |\vec{E}(x, t)|^2 \quad (12-1-3)$$

* 光子 ← 省略してよい

現代物理学では、光は波動的な性質と粒子的な性質を合わせ持つ量子性を持っていることが確認されている。量子性について扱う分野を「量子力学」と呼ぶ。光を量子的に見る立場では、光を光子と呼び、1 個の光子が持つ光エネルギー ε は、光の角周波数 ω とプランク定数 $h = 6.62607 \times 10^{-34}$ J s, または、ディラック定数(換算プランク定数とも呼ばれる) $\hbar = h/(2\pi)$ を用いて、「 $\varepsilon = \hbar\omega$ 」¹¹⁵ と関係づけられている。

電磁場を量子化し、量子力学を適用すると、(12-1-3)式は、光子の個数 n を用いて、下の式のように n 個の光子が持つエネルギーに比例する。すなわち、光強度は光が持つエネルギーに比例する¹¹⁶。

$$I \sim |\vec{E}|^2 \sim n \hbar \omega$$

一方、光線の幅は光の波長 λ と比べてとても(巨視的に)大きく、電磁波は平面波として光線内を進む。光線内では電磁波は平面波とみなすことができる。

・屈折率

ほかの波と同じように光も違う物質に入射すると、反射、及び屈折が起こる。特に、真空からある媒質 1 に入射し、屈折したときの屈折率を絶対屈折率(光の場合、一般に屈折率と呼ぶ場合は絶対屈折率を指す¹¹⁷) n_1 と呼び、下の式で定義する。

$$n_1 = n_{\text{真空} \rightarrow 1} = c/v_1 \quad (12-1-4)$$

したがって、媒質 1 から媒質 2 へ入射したときの屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ (この屈折率を相対屈折率や、あるいは、媒質 1 に対する媒質 2 の屈折率と呼ぶ)は絶対屈折率を用いて下の式で表すことができる。ここで、屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ において、速さの比や波長の比の分数で記述した場合、分数の分子が媒質 1 での速さ v_1 や波長 λ_1 であったが、絶対屈折率を用いるとその定義から屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ の分数の分子が媒質 2 での絶対屈折率 n_2 となる。

¹¹³ 電磁波が横波となることは、「電磁気学 (著者による text では 8 章)」で学ぶ。

¹¹⁴ yz 平面で電場が向く向きを考えると y 方向と z 方向の 2 つの自由度がある。2 つの自由度に関して扱うと電磁波の性質として「偏光」があるが、ここでは扱わない。著者による「電磁気学;9 章 電磁波の性質」で記述予定である。

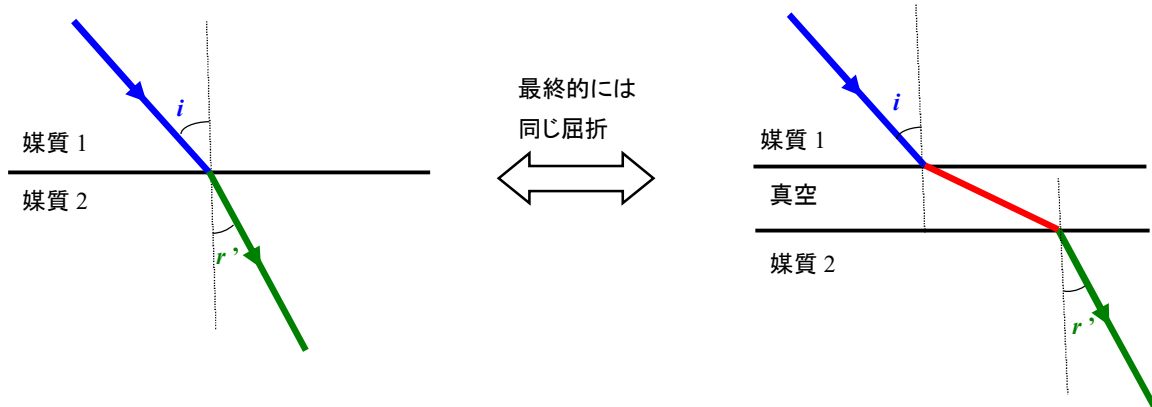
¹¹⁵ この関係式は 1905 年、アインシュタインが光子仮説として提案し、その後、実験によって確認された。

¹¹⁶ 正しくは、真空中の単位体積当たりの電磁場のエネルギー(エネルギー密度)が、「 $\varepsilon_0 |\vec{E}|^2/2 + \mu_0 |\vec{H}|^2/2$ 」で、これを体積積分すると、エネルギー $\sim n \hbar \omega$ (角周波数 ω の光子の数 n)と表すことができる。

¹¹⁷ 絶対屈折率 n は、(12-1-4)式より、必ず、「1 以上 ($n \geq 1$)」になる。空気中での絶対屈折率はほぼ 1 である。

$$n_{1 \rightarrow 2} = v_1/v_2 = (v_1/c) \cdot (c/v_2) = \frac{1}{n_1} \cdot n_2 = \frac{n_2}{n_1} = n_2/n_1 \quad (12-1-5)$$

これは下の図のように、媒質 1 から媒質 2 へ入射するのと、媒質 1 から一旦、真空へ入射し、さらに真空から媒質 2 へ入射するのと結果的には同じ屈折となることを意味する。

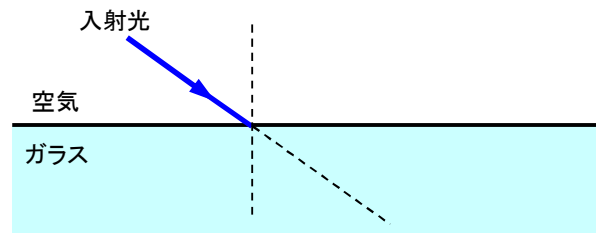


(11-8-7)式に示したのと同様のように、境界面に対し法線方向から入射光までの角度 i を入射角、屈折光までの角度を屈折角 r' と呼び、媒質 1 での波長 λ_1 と媒質 2 での波長 λ_2 として下の「**屈折の法則(スネルの法則)**」が成り立つ。

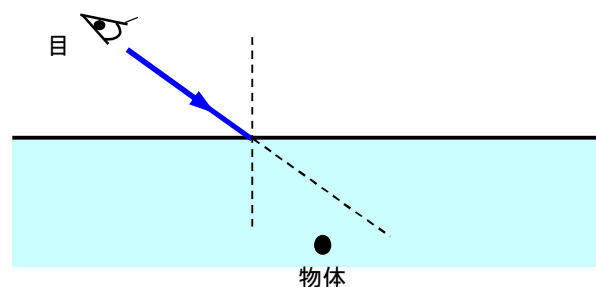
$$n_{1 \rightarrow 2} = v_1/v_2 = \lambda_1/\lambda_2 = \sin i / \sin r' = n_2/n_1 = k_2/k_1 \quad (11-8-7) \text{ or } (12-1-6)$$

問12-1-1. 波長 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)の光が空気からガラスに入射したときの屈折率 $n = 1.50$ となるときの、ガラス中の光の速さ v と波長 λ' と周波数 f を求めよ。

問12-1-2. 下の図に空気から水中に光が入射するとき、反射光と屈折光の軌跡をかけ。



問 12-1-3. 空気から水中にある物体(水面から深さ h にある)を見ると物体はどの位の深さに見えるか? 水の屈折率 n とする。ただし、下の図よりも物体と目は水面に対し垂直に近いものとする。

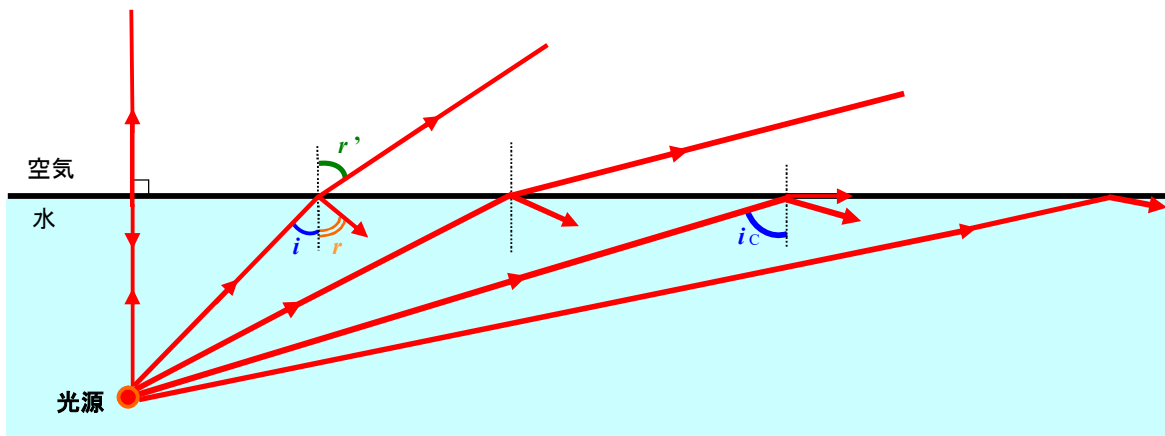


・全反射

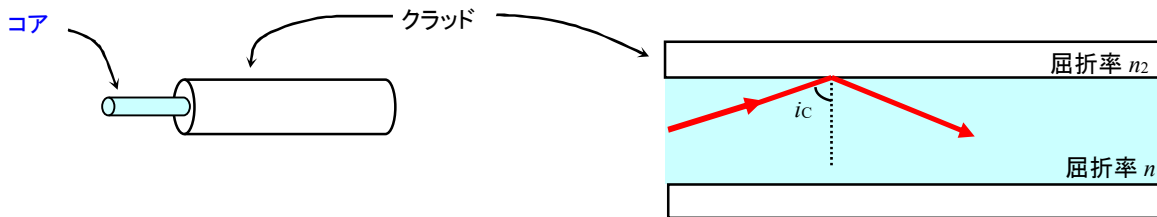
一般の波の性質と同様に、光の速さが遅い媒質 1 からより速い媒質 2 へ光が入射する場合 ($v_1 < v_2$)、入射角 i を増加させていくと屈折角 r' も増加する。屈折角 r' が 90° となる時の入射角を臨界入射角 i_c と呼ぶ。入射角が臨界入射角 i_c を越えた場合 ($i > i_c$) は、屈折光がなくなり、反射光のみができる。このような状態を**全反射**と呼ぶ。

例えば、下の図のように水中に光源を置き、そこから出た光が空中との境界にあたる場合を考える¹¹⁸。光源から出た光線はある入射角 i で境界に入射するが、**臨界入射角 i_c** より大きな入射角では全反射する。臨界入射角 i_c は水の絶対屈折率 $n_{水}$ を用いて、下の(12-1-7)式で表すことができる(空気中の光速は真空中の光速 c とほぼ同じとした。光の場合、臨界入射角は絶対屈折率を用いて計算する)。臨界入射角 i_c で入射する場合、**境界に沿って進む屈折光**と反射光が発生する。

$$\sin i_c = n_{1 \rightarrow 2} = v_1/v_2 \quad \rightarrow \quad \sin i_c = v_{水}/c = 1/n_{水} \quad \rightarrow \quad i_c = \arcsin(1/n_{水}) \quad (12-1-7)$$



この「**全反射**」という現象を利用し、光信号を伝送する装置として、光ファイバーがある。光ファイバーは最内側にコアがあり、その外側にクラッドと呼ばれる物質がコアを覆っている。コアとクラッドは屈折率が異なるガラス繊維やプラスチックでできており、クラッドの(絶対)屈折率 n_2 に比べ、コアの(絶対)屈折率 n_1 が高くなるように設計されている ($n_1 > n_2$)。



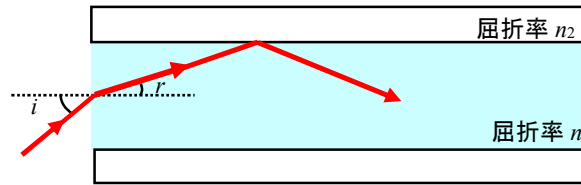
このとき、臨界入射角 i_c はコアとクラッドの屈折率を用いて下の式で表すことができる。この臨界入射角 i_c より大きな角度でコアとクラッドの境界に光が入射する ($i > i_c$) と、光信号は光ファイバー内を全反射して伝わる。

$$\sin i_c = n_{1 \rightarrow 2} = v_1/v_2 = n_2/n_1 \quad \rightarrow \quad i_c = \arcsin(n_2/n_1) \quad (12-1-8)$$

問12-1-4. 石英ガラスとダイヤモンドの屈折率 n は、 $n = 1.46$ と 2.42 である。光がそれぞれの物質から真空中に入射するときの臨界入射角 i_c を求めよ。

¹¹⁸ この場合は、媒質 1 は水、媒質 2 は空気になり、速さの大小関係は「水中の光の速さ $v_{水} <$ 空気中の光の速さ c 」となる。

問 12-1-5. コアの屈折率 n_1 、クラッドの屈折率 n_2 からなる光ファイバーに図のように真空から光が入射した。光ファイバー内で光が全反射しながら伝送するためには、真空からのコアへの入射角 i をどのように設計すればよいか？

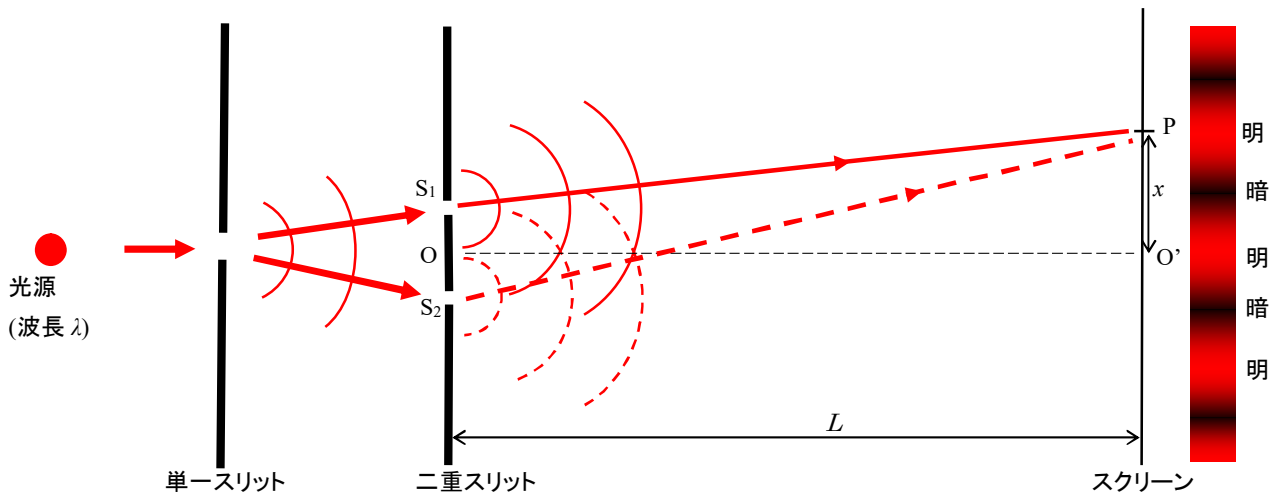


・光の干渉

同じ媒質上で波長が等しい 2 つの波(波の速さは波と媒質で決まる)が合成されると、「波の干渉」が発生したのと同様に、光においても、同じ波長の 2 つの光が合成されると、光の強度が強め合う場所と弱め合う場所が交互にできる「光の干渉¹¹⁹⁾」が発生する。

① 二重スリットによる干渉

レーザー光線を光源とし、二重スリットを通すとスクリーンに光が強め合う場所と弱め合う場所が交互に現れる干渉縞ができる。下の図では、レーザー光ではないが波長 λ の単色光を光源として¹²⁰⁾、まず 1 つのスリットを通し¹²¹⁾、次に、長さ $d (=S_1S_2)$ だけ離れた位置にある二重スリット(二重スリットの位置は S_1, S_2 で、その中央を点 O とする)を通す。そのとき、二重スリットから長さ L ($=OO'$) だけ離れたスクリーンに光が強め合う場所と弱め合う場所が交互に現れる干渉縞ができる。



スクリーン上の点 P で光が強め合って、明るくなるためには(11-9-1)式と同じ条件式が成立する必要がある。スクリーン上の点 O' と点 P の間の長さを x とすると($L \gg x, d$ となることに注意する¹²²⁾)、2 つの光の経路の経路差 $S_2P - S_1P$ は下の式のように近似でき、経路差が単色光の波長 λ の整数倍となるとき、波として強め合ってスクリーン上で明るくなる。

$$S_2P - S_1P = \sqrt{(x + d/2)^2 + L^2} - \sqrt{(x - d/2)^2 + L^2} \approx \frac{xd}{L} = m\lambda \quad (m \text{ は整数}) \quad (12-1-6)$$

¹¹⁹⁾ 干渉が生じる光のことを「コヒーレント(coherent)な光」と呼ぶ。コヒーレント性が高い光はレーザー光である。

¹²⁰⁾ 光源はある大きさを持っているが、異なる場所、異なる時刻で発した光の初期位相は、(一般には)そろっていない。単色光でも、初期位相がそろっていない場合は、2 つの波が合成しても干渉は起きない。

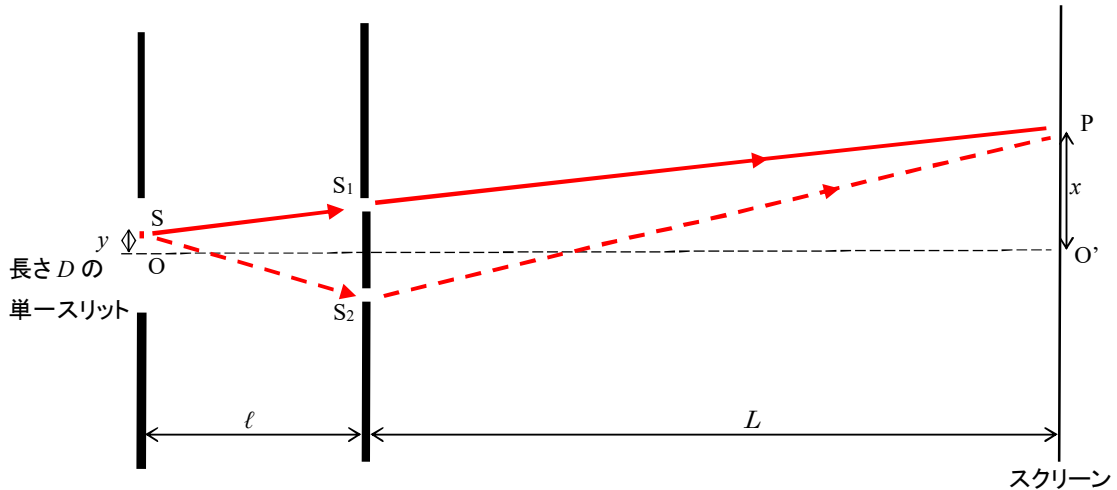
¹²¹⁾ スリットを 1 つ通すことで、近似的に点光源から同時刻に発する光とみなすことができる。点光源から同時に発した光は干渉性を持ち、二重スリットを通過させることで干渉縞ができる(干渉する)。

¹²²⁾ この条件が成り立つとき、 $\sqrt{L^2 + x^2} = L\sqrt{1 + (x/L)^2} \approx L(1 + \frac{1}{2}(x/L)^2)$ を使うことができる。

例えば、光源として赤色の光(波長 $\lambda \sim 700 \text{ nm} = 7.0 \times 10^{-7} \text{ m}$)を用いると、明暗の間の長さ $\sim x \sim 1 \text{ mm} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、二重スリット間の長さ $\sim d \sim 0.7 \text{ mm} = 7.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ 、二重スリットとスクリーン間の長さ $\sim L \sim 1.0 \text{ m}$ 程度にとると、(12-1-6)式を満足する。

* 単一スリットの意味と干渉性 ← 省略してよい

光源から出た光が始めに通過する単一スリットを通す意味を考えよう。そこで、単一スリットの穴の長さを点から有限の長さ D にしてみよう。この長さ D のスリットから出発する光のできる干渉縞の強度を計算する。長さ D のスリットの中心 O から長さ y だけ離れた地点 S から光が発し、スリット S_1 と S_2 を通過して、点 P に光が到達するとする。



2つの経路 OS_1P と OS_2P の経路差は、 $L, \ell \gg D, d, x$ として下の式のように近似して表すことができる。

$$OS_2P - OS_1P = \sqrt{(y+d/2)^2 + \ell^2} + \sqrt{(x+d/2)^2 + L^2} - (\sqrt{(y-d/2)^2 + \ell^2} + \sqrt{(x-d/2)^2 + L^2})$$

$$\approx \frac{y d}{\ell} + \frac{x d}{L}$$

経路 OS_1P と OS_2P で点 P に到達する時間を t_1 と t_2 とすると、 $t_1 = c/OS_1P$ で $t_2 = c/OS_2P$ となる。経路 OS_1P を通過して点 P での位相角 $\gamma_1 = \omega t_1 - k(OS_1P)$ 、経路 OS_2P を通過して点 P での位相角 $\gamma_2 = \omega t_2 - k(OS_2P)$ とすると、2つの経路を通過し、点 P でできる合成電場 E は(11-9-9)式と同様になる。干渉効果は位相差 $\gamma_1 - \gamma_2$ が関係するので、合成電場

$E \sim \cos(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2})$ と表され、光強度 $I \sim |E|^2 \sim \cos^2(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}) \sim 1 + \cos(\gamma_1 - \gamma_2)$ となる。ここで、位相差 $\gamma_1 - \gamma_2$ の時間に関

係する項は、 $\omega t_1 - \omega t_2 = \omega c(OS_2P - OS_1P)/(OS_2P \cdot OS_1P) \sim 0$ で干渉にはほとんど影響がない。したがって、位相差 $\gamma_1 - \gamma_2 \sim k(OS_2P - OS_1P) \approx k(y/\ell + x/L)d$ と近似できる。スクリーン上での光強度 I の位置 x 依存性は単一スリットでの位置 y について積分して、下の式で表すことができる。

$$I(x) = \frac{I_0}{D} \int_{-D/2}^{D/2} (1 + \cos(\frac{k d}{\ell} y + \frac{k d}{L} x)) dy$$

上の積分を実行すると下の式が得られる。

$$I(x) = I_0 (1 + \varepsilon \cos(\frac{k d}{L} x)) = I_0 (1 + \varepsilon \cos(\frac{\pi d}{\lambda L} x)) \quad (12-1-7)$$

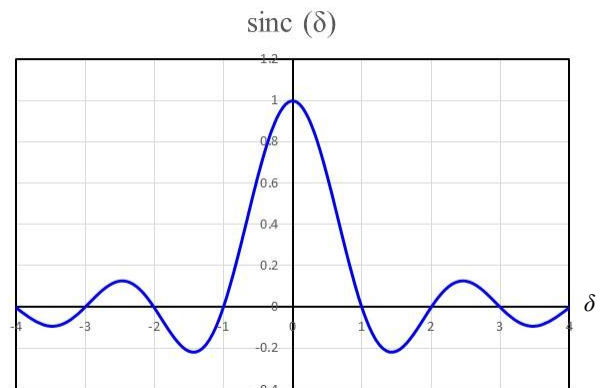
ここで、定数 $\varepsilon = \frac{2\ell}{kdD} \sin\left(\frac{kd}{2\ell} D\right) = \frac{\lambda\ell}{\pi dD} \sin\left(\frac{\pi dD}{\lambda\ell}\right)$ であり、この項に単一スリットの幅 D の効果が含まれている。

変数 $\delta = dD/(\lambda\ell)$ とすると、定数 ε は sinc 関数と呼ばれ、下の式で定義される。

$$\varepsilon = \text{sinc}(\delta) \equiv \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi\delta} \quad (12-1-8)$$

(12-1-7)式より、干渉縞が明るくなるのは、 $\frac{\pi d}{\lambda L} x = m\pi$ ($\rightarrow x = m\lambda L/d$; m は整数)で(12-1-6)式と同じになる。

一方、sinc 関数をグラフにすると右のようになり、変数 $\delta = 0$ (単一スリットの長さ $D = 0$) で最大値「1」となり、干渉性は最大となる。変数 $\delta = 1$ ($dD = \lambda\ell$) や $\delta \rightarrow \infty$ では「0」となり、干渉性は消失し、干渉縞は全く現れない。sinc 関数が負となる領域では明暗が逆転する。このように、単一スリットの長さ D が干渉性に大きく影響する。点光源から出た光(点状の穴があいた単一スリットを通過した光)であれば、二重スリットを通過する2つの光で位相差が発生し、干渉縞が明確に表れる。



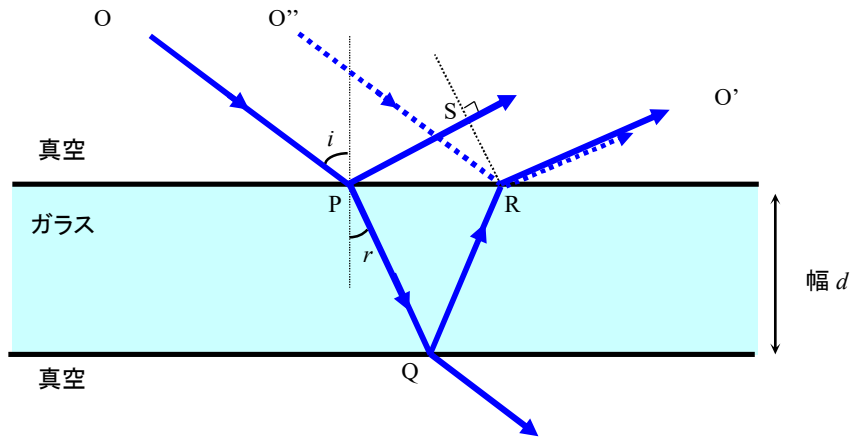
② 等厚干渉(等厚な薄い平板による)干渉 ← 省略してよい

下の図のように、一様な厚さ d の薄い平板ガラスに波長 λ の単色光を真空から入射角 i で入射させる。光はガラスに入射して一部は反射、残りは屈折角 r で屈折し、ガラスの底でも反射する。ガラス中での光の速さ v 、波長 λ' とすると、(絶対)屈折率 $n = c/v = \lambda/\lambda' = \sin i/\sin r$ である。光源は遠方であり平面波として入射し、経路 OPS の反射波と経路 OPQR の屈折波によって干渉が起こる。経路 OPS の長さ = $PR \sin i$ 、経路 PQR の長さ = $2PQ = 2d/\cos r$ である。また、 $PR = 2PQ \sin r = 2d \tan r$ となり、2つの経路の違いによる位相差 $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = k(OPS) - k'(PQR) = 2\pi(2d \sin i \tan r/\lambda - 2d/(\cos r \lambda')) = 4\pi n d (\sin^2 r - 1)/(\cos r \lambda) = -4\pi n d \cos r/\lambda$ となる。真空からガラスに(光が進む速さが速い媒質から遅い媒質に)入射したときの反射光は、位相が π ずれる¹²³。

逆に、ガラスから真空に(光が進む速が遅い媒質から速い媒質に)入射した反射光は、位相はずれない。したがって、2つある反射光のうち、一方の反射光は位相が π ずれるので、位相差 $\Delta\gamma = 2m\pi$ (m は整数)のとき、弱めあう。

$$2nd \cos r = m\lambda \quad (m \text{ は整数で暗くなる}) \quad (12-1-9)$$

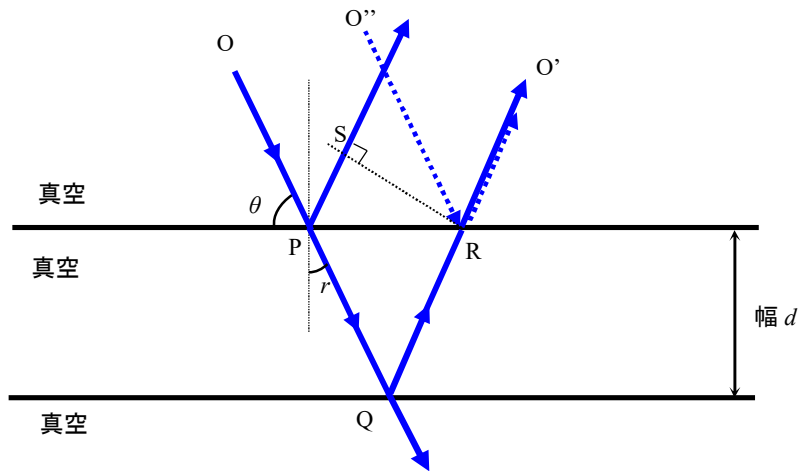
¹²³ 電磁波(光)の反射と屈折については詳しくは、著者の「電磁気学;9章」で紹介するが、ここまでの知識でその原理を理解するのは難しいが、入射角が 0° となる時は、(11-5-5)式より、より遅い媒質に波が入射する場合、反射波は入射波に対し位相が π ずれる(光の速さが速い物質から遅い物質に入射すると、電場の変化に対する応答が悪くなり、境界での入射波と反射波による合成電場は弱めあうように働き、固定端反射に近くなる)。逆に、より速い媒質に波が入射する場合、反射波の位相はずれない(光の速が遅い物質から速い物質に入射すると、電場変化の応答がよくなり、自由端反射に近くなる)。屈折波(透過波)については、(11-5-6)式で示したように、いずれの場合も位相のずれは生じない。



次に、同じような系として、ガラスを取り除き、1枚目と2枚目に半透明の鏡を配置するとしよう。下の図のように角度 θ をとると、「 $\cos r = \sin \theta$, ($r = \pi/2 - \theta$)」が成り立つ。1枚目と2枚目の反射で、位相が共に π ずれるので、2つの反射光が強め合って明るくなる条件式は下の式で表される。これは、X線結晶学における「ブラッグ反射による条件式」と同じ式である(X線結晶学では、2層目の反射も1層目と同じように、X線が原子にぶつかって生じる反射で、同じ反射なので、反射による位相のずれは考えなくともよい)。1層目の点Pと点R、2層目の点Qの位置に原子があると、反射したX線の合成波が強め合うための条件式であり、規則正しく配置された原子間距離 d を測定する方法として用いられている。

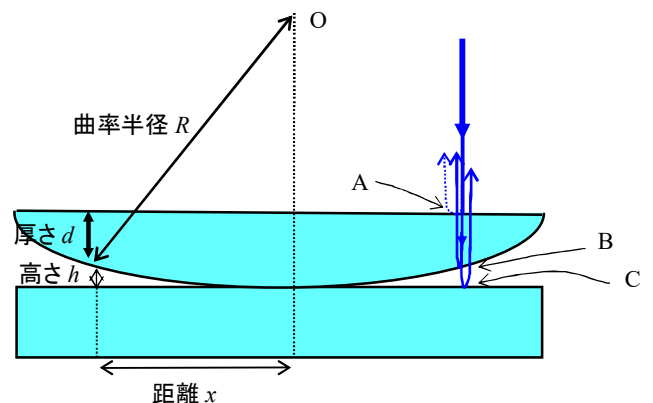
$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m \text{ は整数で明るくなる})$$

(12-1-10)



③ ニュートンリングによる干渉

平面のガラスと曲率半径 R で丸いガラスを置いて、ほぼ真上から波長 λ の単色光を当てる。入射した光は点A, B, Cで反射する。上のガラスの厚さ d は光の波長 λ よりとても長い($d \gg \lambda$)。そのため、点Aと点Bで反射した2つの光では、(12-1-9)式で表せるような干渉の効果は発生しない。そのため、点Bでの反射光(反射による位相のずれはない)と点Cでの反射光(反射で位相が π ずれる)の2つの反射光の干渉で干渉縞が生じる(なお、点Bで反射した光も高さ h が微小でほぼ真上に反射するものと近似する)。点Bと点Cで反射した光の経路差 $2h$ は、曲率半径 R と中心からの距離 x を用いて下の式

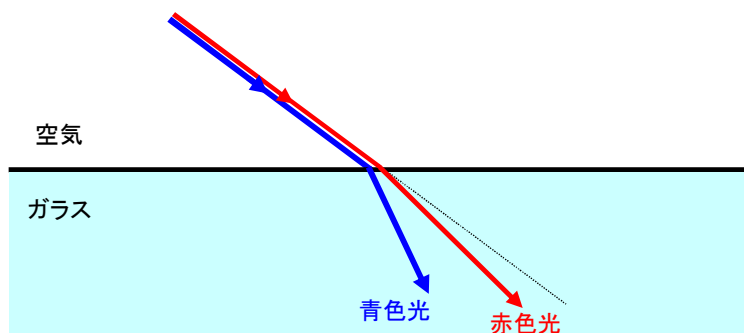


で近似できる。この経路差 $2h$ が $m\lambda$ (m は整数) のとき、暗くなる。レンズの曲率半径 R はニュートンリングによる干渉を用いて測定する。

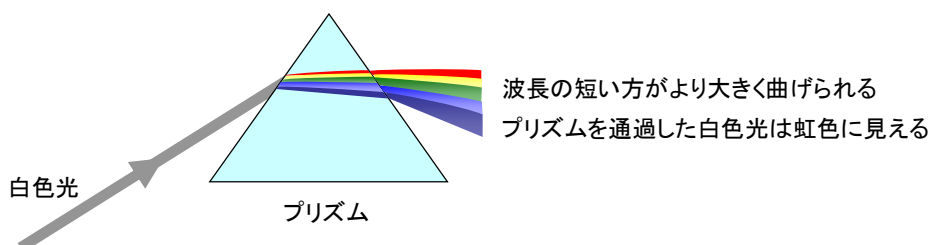
$$2h = 2(R - \sqrt{R^2 - x^2}) \doteq 2(R - R(1 - \frac{x^2}{2R^2})) = \frac{x^2}{R} = m\lambda \quad (m \text{ は整数で暗くなる}) \quad (12-1-11)$$

・光の分散

白色光は複数の波長をもつ光が合成された光である。物質内の光の速さは物質や光の波長によるので、同じ物質に入射してもその波長によって、屈折率も変わってくる。例えば、下の図のように赤色光と青色光を空气中からガラスに斜めに入射させよう。実験によると、多くの場合、赤色光の方に比べ、青色光の方がより大きく曲げられ¹²⁴、屈折率もより大きな値をとることが観測されている。



この現象をよりはっきり示すために、ガラスでできた三角柱のプリズムに白色光を入射させよう。波長の短い光がガラスに入射するとより大きく屈折して、プリズムを出た屈折光は色が分離して、虹色に見える。この現象を「光の分散」と呼ぶ。虹(多くの場合、中心側には紫色が、外側には赤色が配置される。虹が二重にできる場合もある)が発生する原因も水滴に白色光が入射して光の波長によって屈折率が異なるために分散が生じるためである。



・光の散乱

ある物質に光を照射すると、物質の状態によってはバラバラな方向へ光が反射される。このような状態を「光の散乱」と呼ぶ。光の散乱は、物質に入射した光が一度、吸収されて、その後、バラバラな方向に発光する現象である。空气中に漂う微粒子による散乱は、赤い色の光に比べて青色の光はより多く散乱される(「レーリー散乱」と呼ばれる)。夕方(朝方)、太陽の光が赤く見えるのは、目に(散乱されにくい)赤色の光がより多く入ってくるためである。日中、空が青く見えるのは、この散乱によって青い光が広い空のいたる場所から目に入ってくるために、空が一様に青く見える(宇宙に行くと、レーリー散乱による光が目に入らないので、空は暗黒に見える)。

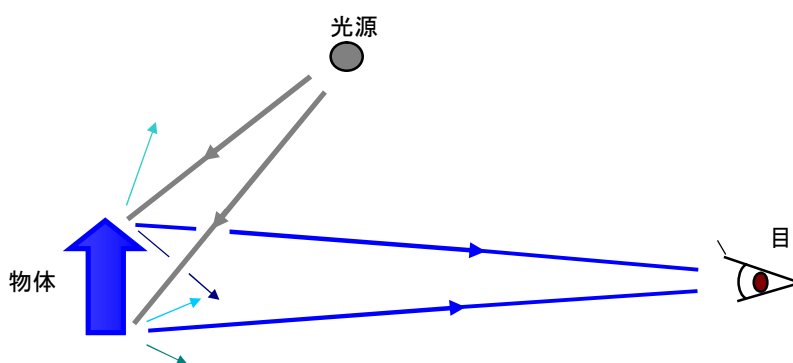
問 12-1-5. 光の干渉を調べるための二重スリットの実験を考える。

¹²⁴ このように青色光の方がより大きく曲げられる(波長 656 nm の赤色光と 404 nm の紫色光の石英ガラスの空気に対する屈折率は 1.456 と 1.470 であり、約 1% の違いがある)。その理由は光と物質間の相互作用が関係しているがここでは触れない。

- 1) 二重スリットとスクリーン間の長さを大きくすると干渉縞の間隔は広がるか？ 狭まるか？
- 2) 二重スリットの間隔を大きくすると干渉縞の間隔は広がるか？ 狭まるか？
- 3) 赤色光と緑色光を用いて実験を行うとすると、干渉縞の間隔が広いのはどちらの色の光か？

12-2. 凸レンズとレンズの公式

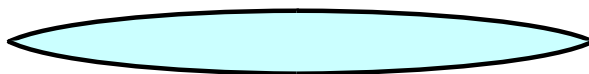
物体が見えるとはどのような現象であるか考えてみよう。まず、光源から出た光が物体にあたる。次に、物体にあたった光は(物体の性質によって)反射、透過(屈折)、吸収、散乱が起こる。これらの現象の中で、反射された光が目に入り、目の中の分子が光を吸収し、電気信号が発生し、その信号が神経を経由して脳に送られて物体を認識する。物体の色は、物体にあたった光の中で、吸収されずに反射した光の波長によって決定される。下に物体が見える状況の図を示す。これ以降、図で描くときは多くの場合、光源があることを前提として物体からの反射光のみを考える¹²⁵。また、物体は大きな矢印で表し、物体を表す矢印の先端(上端(場合によっては、下端も加える)から出る光線のみを描くこととする。



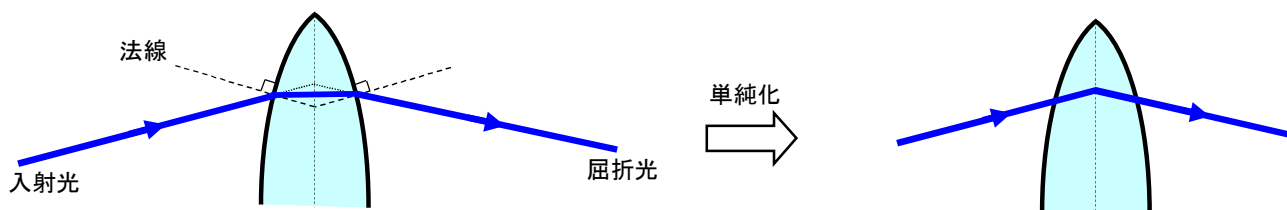
物体からの反射光が目に入り、物体の大きさや色(物体の像)を感じ取ることとなる。人間にとって、物体の位置は目に入った光線を延長した線上に存在していると認識される(実際は光線が曲げられて、その延長線上にはない場合もある)。

・凸レンズの屈折

凸レンズ¹²⁶は丸い板状のガラスなどでできており、中央部分が厚い構造になっている。ここでは、下の図のような、中央に対して左右と上下で対称となるレンズを扱う。



このレンズに光をあてると、光は屈折してその進路を曲げられる。その曲がり方は屈折の法則に従う。上の凸レンズを拡大する。



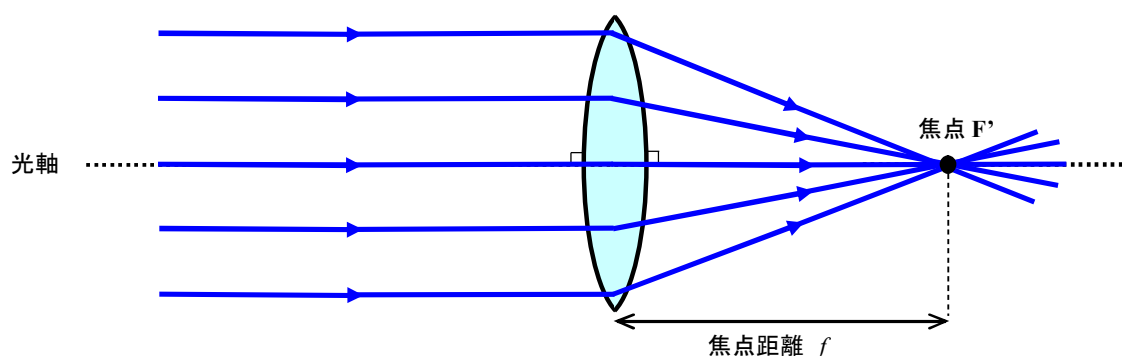
¹²⁵ 物体から出た光が、「どう目に届くか」を考える。

¹²⁶ 凸レンズを作成したとき、この中央が出っ張った形が植物のレンズ豆に似ているため、「レンズ」と呼ばれるようになった。

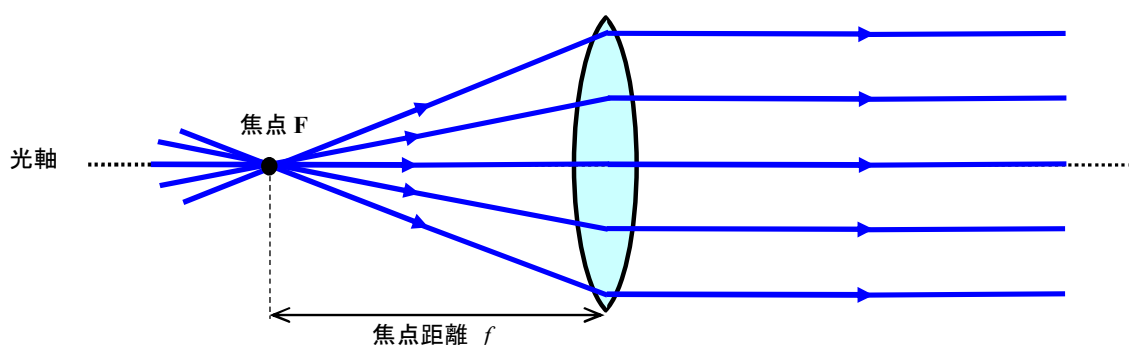
光の経路を描くと上の左の図のようになる¹²⁷。右半面と左半面のレンズの球面は対称と仮定すると、光線の経路も左右対称となる。ガラスの方が空気よりも光の速が遅くなるので入射光の延長線よりも内側に曲げられ(入射角 > 屈折角)、光線が凸レンズをでていく。上の右図では、(実際は2つの境界で屈折が起こるが)レンズによる像のでき方を議論する際は境界で曲げられても、レンズの中央で曲げられても関係ないので、単純化して(便宜的に)レンズの中央部で光線が曲げられるものとして描いた。今後はレンズを通過した光線は中央で屈折し、曲げられるものとして描く。また、レンズの端になるほどレンズへの入射角が大きくなるので屈折によってレンズを通った出る光も曲がられ方が大きくなる。したがって、レンズの端に入った光ほど曲げられ方が大きくなる。

・レンズの焦点距離(Focal length) f

理想的なレンズでは、平行光線をレンズに照射すると屈折光は1点に集まる。この位置を焦点(しょうてん; Focus)と呼ぶ。下の図のようにレンズの中心と焦点との間の距離を焦点距離 f (Focal length; 単位は m, または cm)と呼ぶ。また、レンズの中心にあり、表面と垂直な直線を光軸と呼ぶ。レンズが正しく設計・制作されていないと、平行光線は1点に集まらない。



逆に、光の進路は逆行しても同じ経路をたどるので、下の図のように焦点 F を通過してレンズに入射した後は光軸と平行に進む(以下では、レンズの左側にある焦点を F とし、右側にある焦点を F' と表す)。



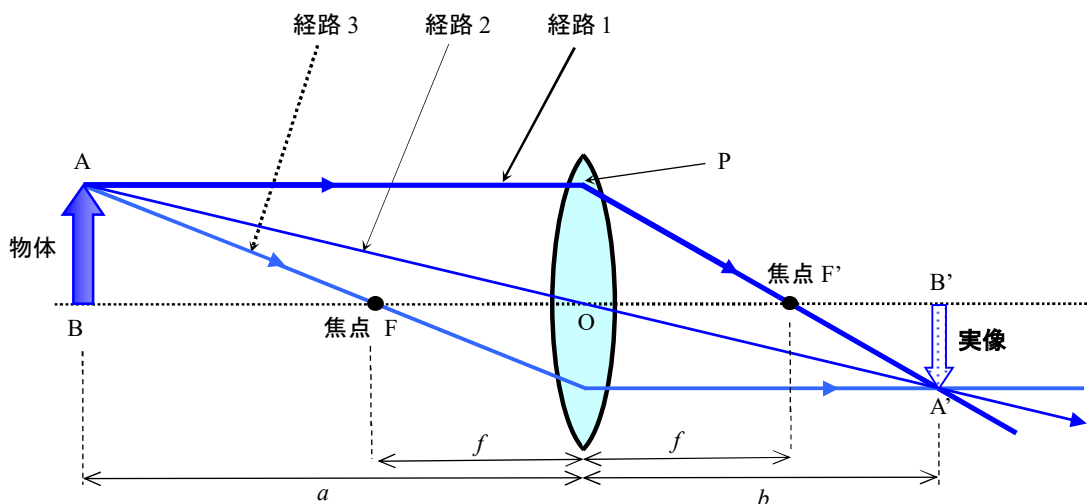
・凸レンズによる像

虫メガネに代表されるような凸レンズを使って物体を見ることを考えよう。凸レンズを使ってものを見ると、小さいもの(例えば、本に書いてある小さな文字)が大きく見える。ここでは、凸レンズを使って物体の像が見えるための条件式とその倍率を求める。

¹²⁷ ここでは、屈折の様子を描くために光線で光の曲がり方を図示したが、実際にレンズを通過する光は光線ではなく(複数の光線がつながった)平面波である。さらに、薄いレンズを考えているので(中央部とレンズの両端とでは入射角があまり変わらない)、プリズムで見られたような「光の分散」の効果を無視して、取り扱うこととする。

① 焦点 F よりレンズの外側に物体がある場合

物体の位置は光軸上にあるとする。(光源から反射した)物体の先端から出た光は、四方に広がるが、下の図のように、焦点 F より遠い場所に物体を置くと、レンズを通過した複数の光線はある場所で 1 点に集まり、交差する¹²⁸。物体から出た複数の光線が集まってできた像を**実像**と呼ぶ。実像ができた場所にスクリーンを置くと、そのスクリーンに像が写り、どんな場所にいる人からもその実像を見ることができる。



物体の先端から出た複数の光線の中で、上の図に描いた 3 つの光の経路はそれぞれ下のようになる。

- 経路 1: 物体の先端から出た光は光軸と平行に進み、レンズを通過する。通過後の光は焦点 F' を通過する。
- 経路 2: 物体の先端から出た光はレンズの中央を通過する。レンズは左右対称より、光はそのまままっすぐ進む。
- 経路 3: 物体の先端から出た光は焦点 F を通りレンズを通過する。通過後は光軸と平行に進む。

上の図から、実像では物体が上下、逆さまに写ることとなる(倒立した実像が写る)。上の図に示したそれぞれの長さは下のように入れられる。

- f = 焦点距離 = OF の長さ = OF' の長さ (左右対称より, $OF = OF'$)
- a = レンズの中心と物体の間の距離 = OB の長さ
- b = レンズの中心と実像の間の距離 = OB' の長さ
- AB = 物体の大きさ
- A'B' = 実像の大きさ

凸レンズで実像を作るために 3 つの距離 f, a, b の間には下のような関係式(「**レンズの公式**」)が成立する。

凸レンズで実像を作るためのレンズの公式 (→ 像がレンズの右側(物体に対してレンズの後方にある時))

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{12-2-1}$$

¹²⁸ 1 点に集光することで像がぼやけずに、明るく見える(もし集光しない場合は、像がぼやけたり、暗くなったりして元の物体を認識できない)。 → 「ピントが合っている」という。

実像の倍率 = 像の大きさ/元の物体の大きさ = $|A'B'/AB| = b/a$

(12-2-2)

* (12-2-1)式の導出

$\triangle A'B'O$ と $\triangle ABO$ は相似 $\rightarrow |A'B'/AB| = |OB'/OB| = b/a$ ← 倍率の式(12-2-2)式

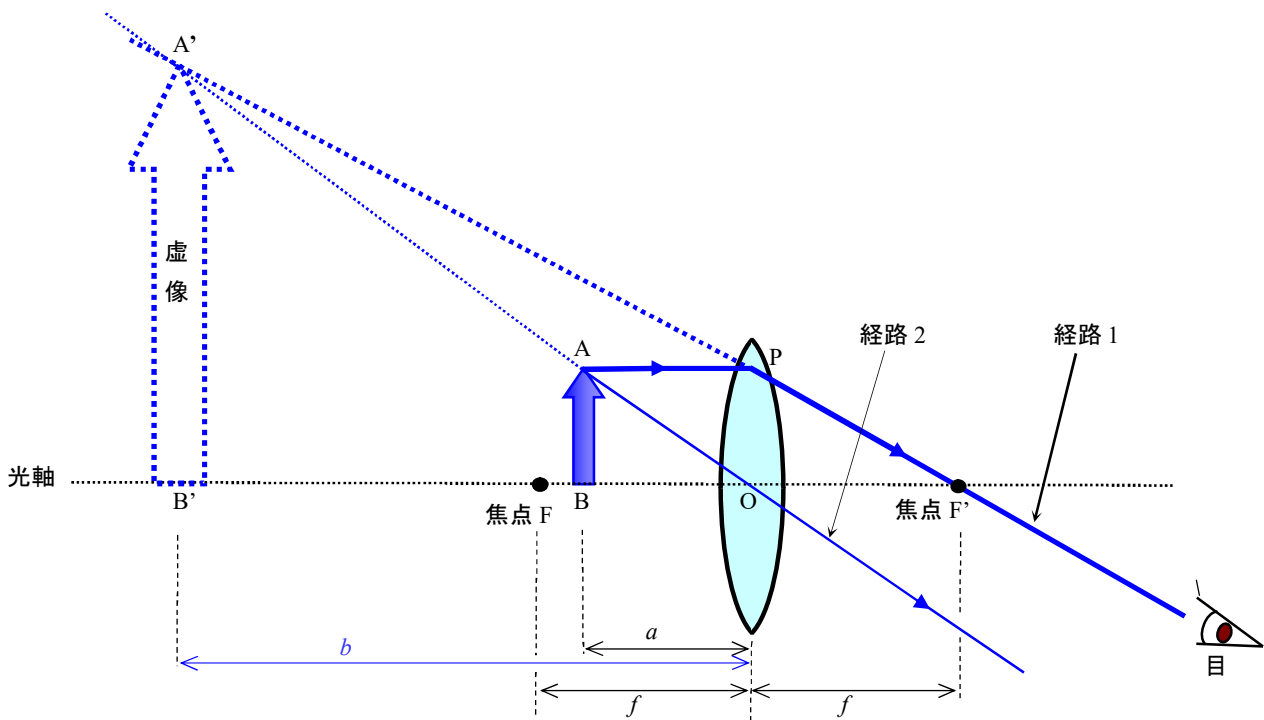
$\triangle A'B'F'$ と $\triangle POF'$ は相似 $\rightarrow |A'B'/PO| = |B'F'/OF'| = (b-f)/f$

$AB = PO$ より上の2式は等号で結ばれる. $\rightarrow b/a = (b-f)/f \rightarrow b/a = b/f - 1$

\rightarrow 両辺を b で割って $\rightarrow 1/a = 1/f - 1/b \rightarrow$ 移項すると(12-2-1)式が導出できる.

② 焦点 F よりレンズの内側に物体がある場合

次に、物体 AB の位置を焦点 F よりもレンズに近い場所に置いてみよう。この場合、物体から出た光は1点に集まらず、実像はできない。下の図のように、目を経路1の先に持ってくると、レンズを通して大きくなった虚像 A'B' をみることができる。



上の図から光の経路はそれぞれ下のようになる。

経路1：物体の先端から出た光は光軸と平行に進み、レンズを通過する。通過後の光は焦点 F' を通過する。

経路2：物体の先端から出た光はレンズの中央を通過する。レンズは左右対称より、光はそのまままっすぐ進む。

光が $A \rightarrow P \rightarrow F'$ と進むので、焦点 F' の先に目を置くと、目には物体からの光が A' から発したように見える。つまり、目とレンズと焦点が一直線上に配置されたとき、目には像が見える。その像を虚像と呼ぶ。他の場所からレンズを見てもその像は見えない。ここでできた虚像は、像が逆転(倒立)しない。凸レンズを虫メガネとして使う場合は拡大したい物体を焦点よりレンズ側に置き、虚像を作ってより大きく見えるようにする。実際、凸レンズの近くに物体や文字を置くと大きく見え、遠くに物体や文字を置くとその像が反転して見える。

a = レンズの中心と物体の間の距離 = OB の長さ

b = レンズの中心と虚像の間の距離 = OB' の長さ

A'B' = 虚像の大きさ

とすると、レンズの公式は下の式ようになる。

凸レンズで虚像を作るためのレンズの公式 (→ 像がレンズの左側(物体に対してレンズの前方にある時)

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (12-2-3)$$

$$\text{虚像の倍率} = \text{虚像の大きさ/元の物体の大きさ} = |A'B'/AB| = b/a \quad (12-2-4)$$

* (12-2-3)式の導出

$\triangle A'B'O$ と $\triangle ABO$ は相似 → $|A'B'/AB| = |OB'/OB| = b/a$ ← **倍率の式**(12-2-4)式

$\triangle A'B'F'$ と $\triangle POF'$ は相似 → $|A'B'/PO| = |B'F'/OF'| = (b+f)/f$

$AB = PO$ より上の2式は等号で結ばれる. → $b/a = (b+f)/f$ → $b/a = b/f + 1$

→ 両辺を b で割って → $1/a = 1/f + 1/b$ → 移項すると(12-2-3)式が導出できる.

(12-2-1)式においては、**レンズと実像の間の距離 b の前の符号を「+」**として、(12-2-3)式はでは、**レンズと虚像の間の距離 b の前の符号を「-」**としたことに相当する。

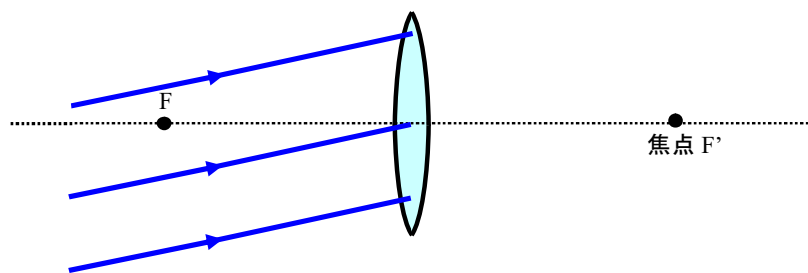
問 12-2-1. 焦点距離 $f = 6.0$ cm の凸レンズがある。

- 1) 凸レンズから左へ 8.0 cm 離れた場所の光軸上に大きさ 2.0 cm の物体を置いた。このときにできる像は実像か虚像か? その像とレンズの間の距離とできた像の大きさを作図して求めよ。
- 2) 凸レンズから左へ 4.0 cm 離れた場所の光軸上に大きさ 2.0 cm の物体を置いた。このときにできる像は実像か虚像か? その像とレンズの間の距離とできた像の大きさを作図して求めよ。

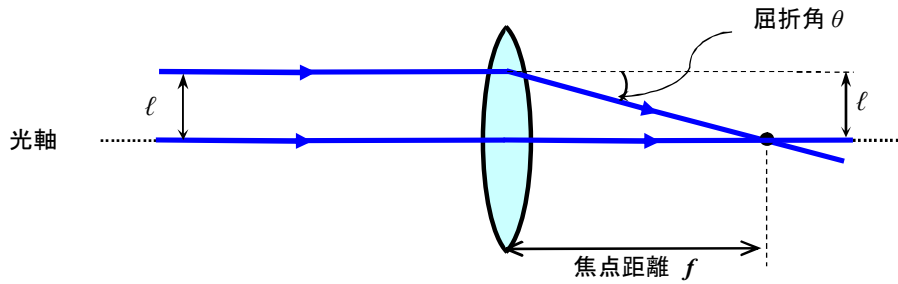
問 12-2-2. 焦点距離 f の凸レンズがある。レンズから右側にレンズからの距離 a を下のように置いたとき、できる像は実像か、虚像か? またできた像のレンズ距離 b とできた像の倍率を答えよ。

- 1) レンズからの距離 $a = 2f$ としたとき
- 2) レンズからの距離 $a = 3f$ としたとき
- 3) レンズからの距離 $a = f/2$ としたとき
- 4) レンズからの距離 $a = f$ としたとき(焦点の上に物体を置いたとき)

問 12-2-3. 下の図のように凸レンズに斜めから平行光線が入射した。凸レンズを透過する光線を矢印で図示せよ。

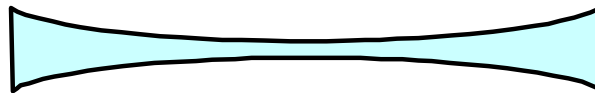


問 12-2-4. 下の図のようにレンズの中心から長さ ℓ だけ離れた凸レンズ(焦点距離 f)の部分へ平行光線を入射させた時の屈折角 θ を求めよ.



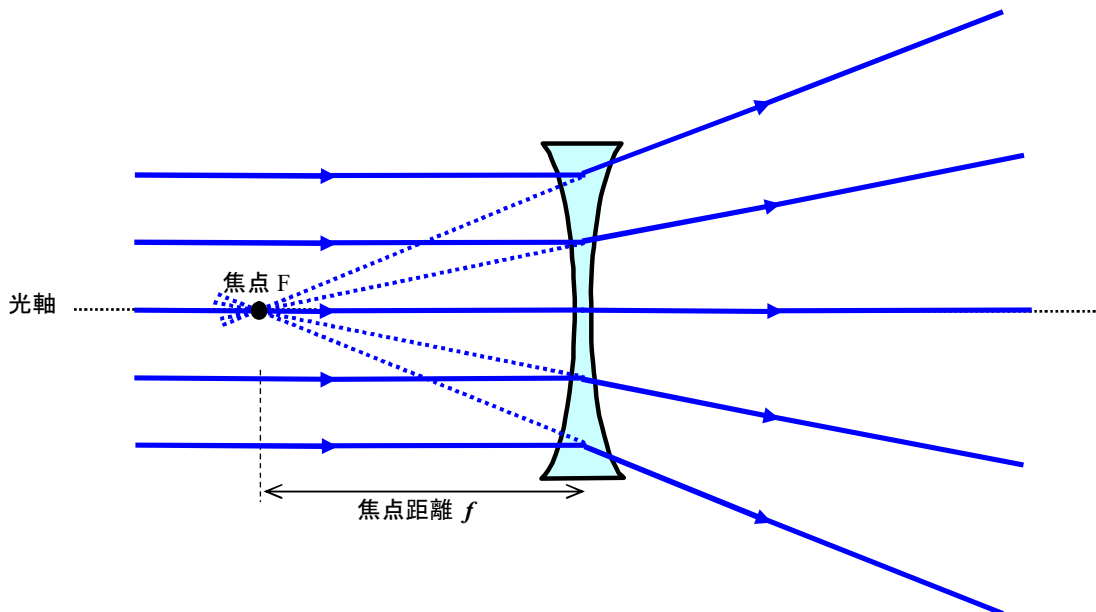
12-3. 凹レンズとレンズの公式

凸レンズは中央部分が厚く、周辺部が薄いガラスでできていたが、凹レンズは逆に、中央部が薄く、周辺部が厚いガラスでできている。したがって、光の屈折の様子も凹レンズは凸レンズと逆になる。ここでも、下のような左右前後、対称な凹レンズを扱う。

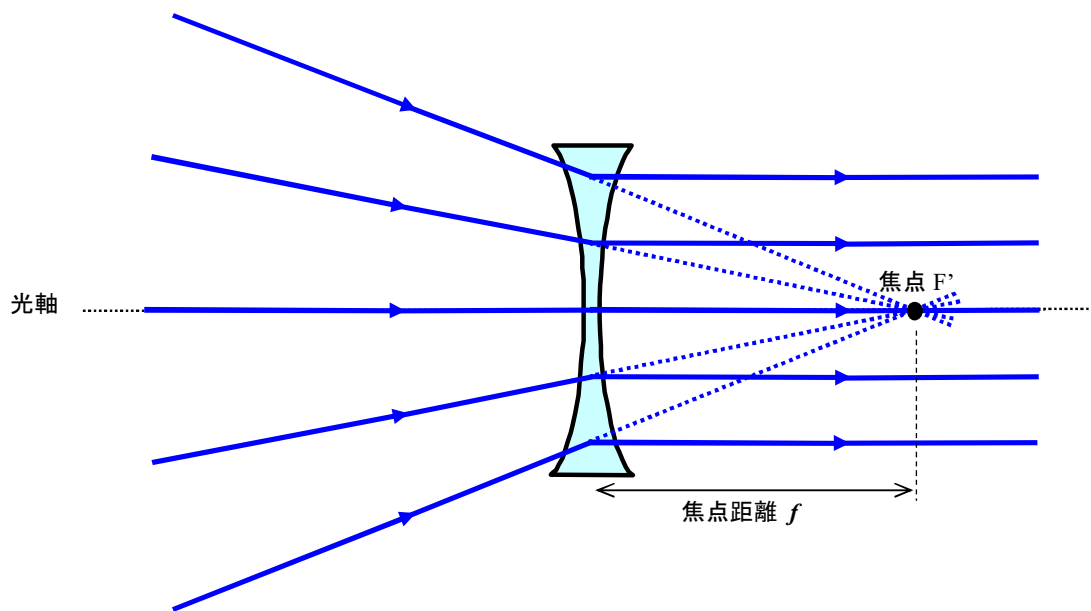


・凹レンズの焦点距離

凹レンズでは平行光線を入射させると、凸レンズとは逆に外側に光が広がってしまう。凹レンズの焦点は下の図のように、平行光線を入射した後の屈折光を延長して、延長した光が集まる点 F を指す。凹レンズでは、この焦点 F からあたかも光が出ているように見える。

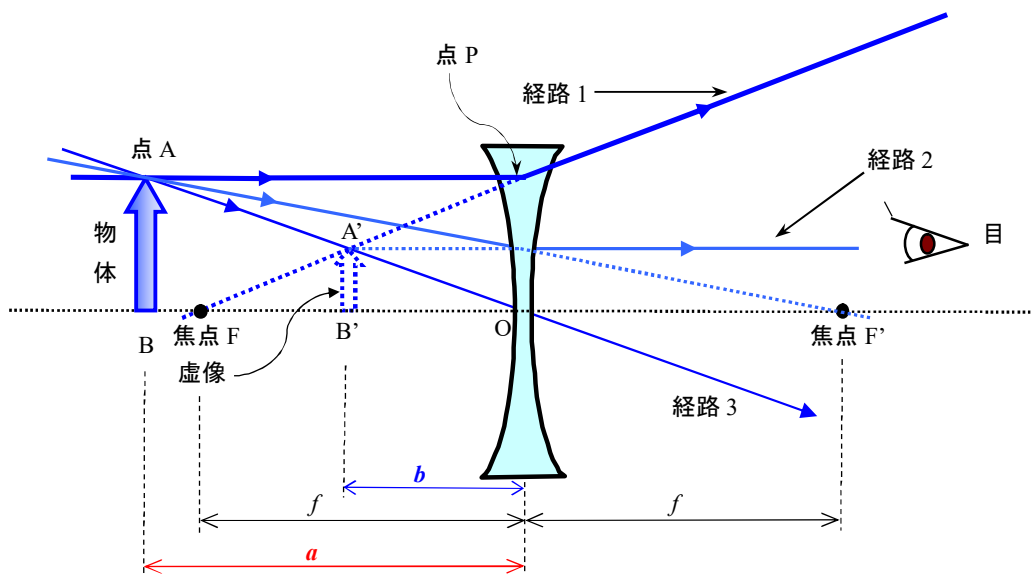


逆にレンズを通過した後、平行光線になった場合は、入射光を延長した線が集まった点が焦点 F' となる。



・凹レンズによる像

凹レンズによる像は物体の位置がどこにあっても、恒に**虚像**となる。



上の図から光の経路はそれぞれ下のようになる。

- 経路 1: 物体の先端から出た光は光軸と平行に進み、レンズを通過する。通過後の光はレンズの外側方向へ曲げられて進む(レンズ通過後の光線を延長して、元をたどると焦点 F にあたる)。
- 経路 2: 物体の先端から出た光はレンズを通過する。通過後は平行光線となって進む。(レンズ通過前の光をさらに延長すると、焦点 F' にあたる)
- 経路 3: 物体の先端から出た光はレンズの中央を通過する。レンズは左右対称より、光はそのまままっすぐ進む。

目でレンズ越しに物体をみると、(実際の物体 AB より小さく)虚像 A'B'が見える。虚像は上下、逆転しない(倒立しない)ように人の目に映る。ここで、再度、レンズの公式に関係している長さについてまとめる。

- f = 焦点距離 = OF の長さ = OF' の長さ (左右対称より, OF = OF')
- a = レンズの中心と物体の間の距離 = OB の長さ
- b = レンズの中心と虚像の間の距離 = OB' の長さ ← 上の図では $a < b$
- AB = 物体の大きさ
- A'B' = 虚像の大きさ

凹レンズを用いて虚像ができるための「**レンズの公式**」は下の式で表される。

凹レンズで虚像を作るためのレンズの公式

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \tag{12-3-1}$$

$$\text{実像の倍率} = \text{実像の大きさ/元の物体の大きさ} = |A'B'/AB| = b/a \tag{12-3-2}$$

* (12-3-1)式の導出

$\triangle A'B'O$ と $\triangle ABO$ は相似 $\rightarrow |A'B'/AB| = |OB'/OB| = b/a$ ← **倍率の式**((12-3-2)式)

$\triangle A'B'F$ と $\triangle POF$ は相似 $\rightarrow |A'B'/PO| = |B'F/OF| = (f-b)/f$

AB = PO より上の 2 式は等号で結ばれる. $\rightarrow b/a = (f-b)/f \rightarrow b/a = 1 - b/f$

\rightarrow 両辺を b で割って $\rightarrow 1/a = 1/b - 1/f \rightarrow$ 移項すると(12-3-1)式が導出できる。

・まとめ

人の目を右側に置き、その左側にレンズを置く時、下の「**レンズの公式**」に表れる物理量において、物体とレンズ間の距離 = a 、レンズとできた像の間の距離 = b 、レンズの焦点距離 = f とするとレンズの公式の一般形は下の式のように表される。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\pm b} = \frac{1}{\pm f} \tag{12-3-3}$$

各々の距離 a, b, f の前につく符号(+ か -)は下の表のようにして決まる。物体をレンズの左側に置くことが多いので距離 a の前の符号は「+」にする場合が多いが、2 枚のレンズを組み合わせたときなど、レンズの右側に配置される場合もある。

前の符号	a	b	f
+	レンズの左側(前方)	レンズの右側(後方) → 実像	凸レンズ
-	レンズの右側(後方)	レンズの左側(前方) → 虚像	凹レンズ

この表の見方の例として、「凹レンズの場合は、(12-3-3)式の焦点距離 f の前の符号を**マイナス(-)**として、虚像がレンズの左側にできるのでレンズと像の間の距離 b の前の符号を**マイナス(-)**として扱う」こととなる。

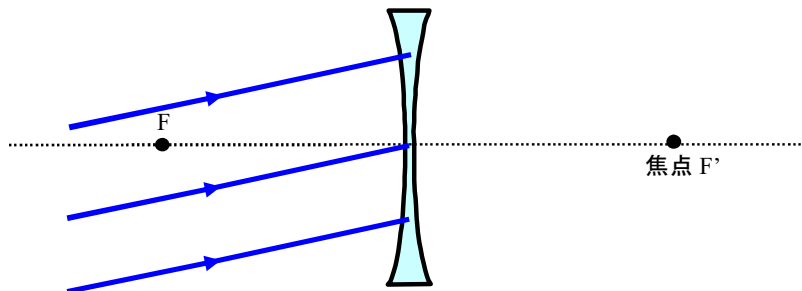
一方、凸レンズの場合は、(12-3-3)式の焦点距離 f の前の符号は**プラス(+)**となるが、「実像がレンズの右側にできる場合は、レンズと像の間の距離 b の前の符号を**プラス(+)**とし」、「虚像がレンズの左側にできる場合は、レンズと像の間の距離 b の前の符号を**マイナス(-)**にする。」

問 12-3-1. 焦点距離 $f=6.0$ cm の凹レンズがある.

- 1) 凹レンズから左へ距離 $a=8.0$ cm 離れた場所の光軸上に大きさ 2.0 cm の物体を置いた. このときにできる像は実像か虚像か? その像とレンズの間の距離とできた像について作図してその大きさを答えよ.
- 2) 凹レンズから左へ距離 $a=4.0$ cm 離れた場所の光軸上に大きさ 2.0 cm の物体を置いた. このときにできる像は実像か虚像か? その像とレンズの間の距離とできた像について作図して, その大きさを答えよ.

問 12-3-2. 焦点距離 f の凹レンズがある. 凹レンズから左へ距離 $a=f$ の位置に物体をおいた. 虚像のできる位置 b と倍率を求めよ.

問 12-3-3. 下の図のように凹レンズに斜めから平行光線が入射した. 凹レンズを透過する光線を矢印で図示せよ.

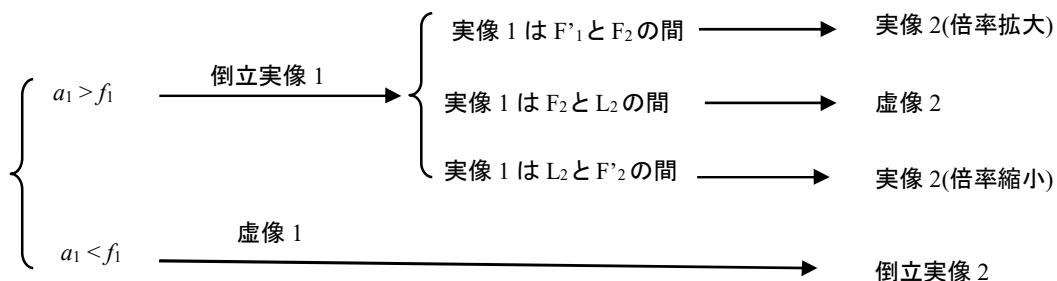


12-4. 2つのレンズによる像

顕微鏡や望遠鏡では2つのレンズを組み合わせると, 倍率をより高くなるように設計し, 制作することがある. そこで, 2つのレンズによってできる像について考えてみよう. なお, ここでは2つのレンズとして, 2つとも凸レンズが作る像についてのみ調べる.

* 2つの凸レンズでできる像

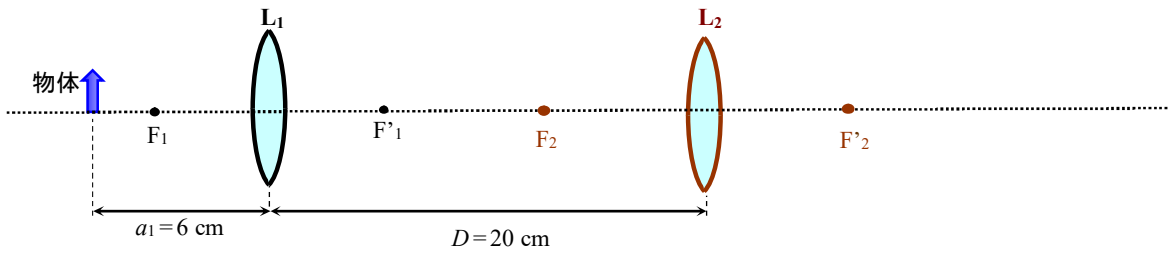
焦点距離 f_1 の凸レンズ L_1 (左側の焦点 F_1 と右側の焦点 F'_1) と焦点距離 f_2 の凸レンズ L_2 (左側の焦点 F_2 と右側の焦点 F'_2) が距離 D で同じ光軸上にあるとする. 始めに, レンズ L_1 から左側に距離 a_1 の位置に物体を置く. 1つの凸レンズが作る像については, すでに調べた ($a_1 > f_1$ なら倒立実像, $a_1 < f_1$ なら虚像). ここで, 凸レンズ L_1 からの距離 b_1 の位置にレンズ L_2 が像を作るとしよう. このとき, 距離 $b_1 > 0$ なら実像 ($b_1 < 0$ なら虚像) ができる. さらに場合分けして, 2つの凸レンズでできる像について下にまとめる.



2つの凸レンズがつくる像について, いくつかの例題を解いて考えてみよう.

例題 1. 焦点距離 $f_1 = 4.0$ cm の凸レンズ L_1 と焦点距離 $f_2 = 6.0$ cm の凸レンズ L_2 が距離 $D = 20$ cm で同じ光軸上にある. レン

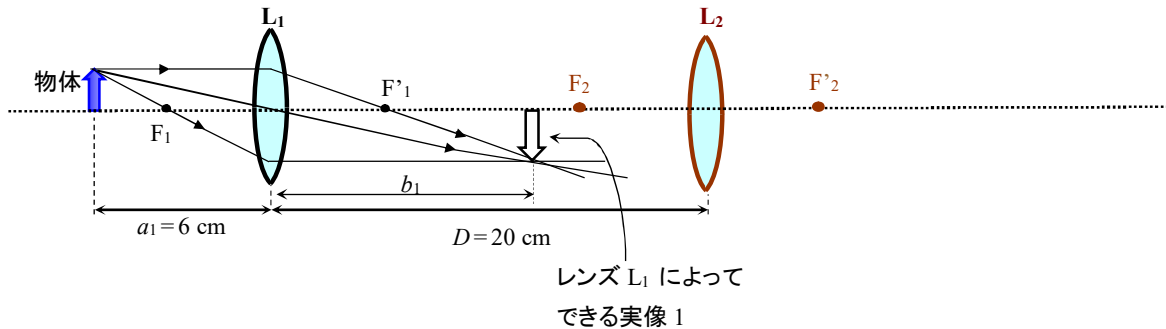
ズ L_1 の左に距離 $a_1 = 6.0 \text{ cm}$ の場所に置いた物体の像は 2 つの凸レンズでどのような像(実像か虚像)がどの場所にあるだろうか?



答: 始めに, レンズ L_1 によって像のでき方を示す. レンズ L_1 の焦点距離 $f_1 = 4.0 \text{ cm}$, レンズ L_1 と物体との間の距離 $a_1 = 6.0 \text{ cm}$ とすると, $f_1 < a_1$ なので, 倒立実像ができる. 実像とレンズ L_1 との距離を b_1 とすると, 下のレンズの公式を用いる.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

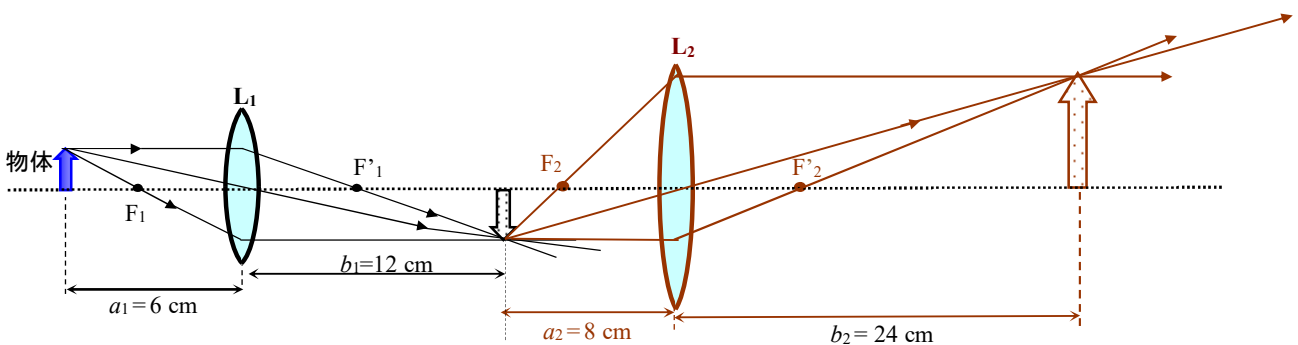
上の式から, $b_1 = a_1 f_1 / (a_1 - f_1) = 12 \text{ cm}$ となる(この時点で倍率は $b_1 / a_1 = 12 / 6 = 2$ 倍となっている).



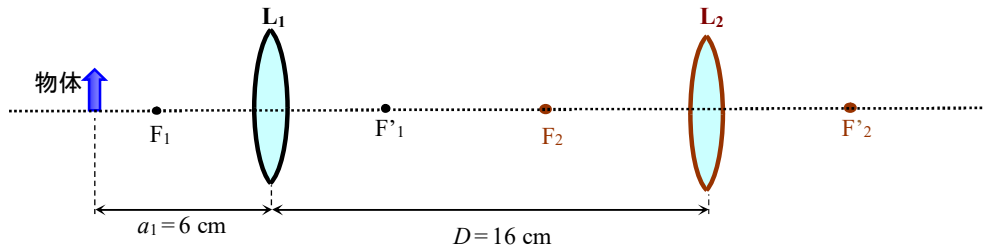
次に, レンズ L_2 による像のでき方を示す. レンズ L_1 でできた倒立実像 1 は焦点 F'_1 と F_2 の間にあり, レンズ L_2 の左側(レンズの前方)にあるので, レンズ L_2 と(レンズ L_1 でできた)像との間の距離 a_2 の前の符号は正で, レンズ L_2 の焦点距離 $f_2 = 6.0 \text{ cm}$, レンズ L_2 と(レンズ L_1 でできた)像との間の距離 $a_2 = D - b_1 = 20 - 12 = 8.0 \text{ cm}$ となる($a_2 > f_2$). レンズ L_2 でできた像とレンズ L_2 との距離を b_2 とすると, 「 $a_2 > f_2$ 」となるので, 下のレンズの公式を用いる.

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

レンズ L_2 と像との間の距離 $b_2 = a_2 f_2 / (a_2 - f_2) = 24 \text{ cm}$ となる. したがって, 距離 b_2 は正なので, できた最終的な像は実像であり, レンズ L_2 の左側に位置する(倍率は $b_2 / a_2 = 24 / 8 = 3$ 倍で, 元の物体と比べると, $2 \times 3 = 6$ 倍になっている). 最終的な倍率は 6 倍.



例題 2. 焦点距離 $f_1 = 4.0 \text{ cm}$ の凸レンズ L_1 と焦点距離 $f_2 = 6.0 \text{ cm}$ の凸レンズ L_2 が距離 $D = 16 \text{ cm}$ で同じ光軸上にある。レンズ L_1 の左に距離 $a_1 = 6.0 \text{ cm}$ の場所に置いた物体の像は 2 つの凸レンズでどのような像(実像か虚像)がどの場所にあるだろうか?

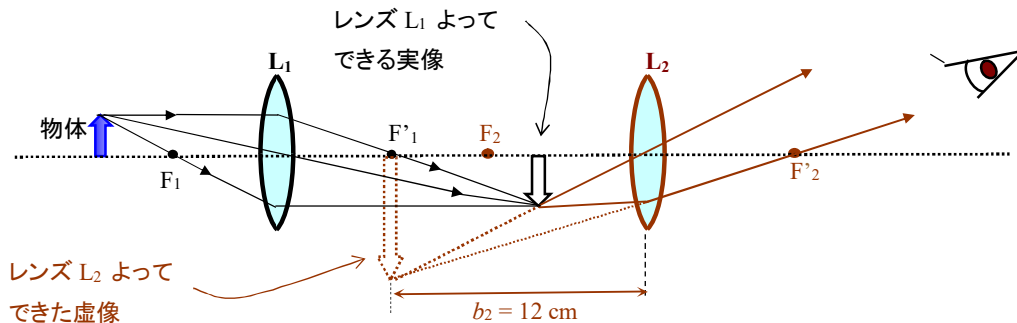


答; 例題 2 は 2 つのレンズの間の距離 $D = 16 \text{ cm}$ となっている以外は例題 1 と同じでデータである(例題 1 では、2 つのレンズ間の距離 $D = 20 \text{ cm}$)。そのため、レンズ L_1 によってできる像は例題 1 と同じであるが、この位置はレンズ L_2 の焦点 F_2 の内側(レンズ L_2 に近い側)でできる。レンズ L_1 によってできる実像はレンズ L_1 からの距離 $b_1 = 12 \text{ cm}$ であり、倍率も 2 倍である。

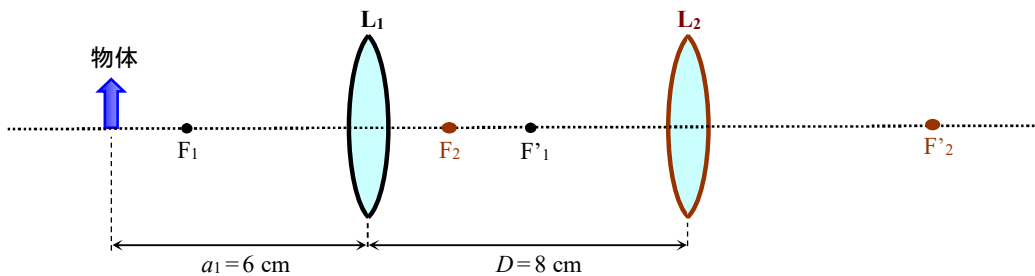
次に、レンズ L_2 による像のでき方を示す。レンズ L_1 でできた実像はレンズ L_2 の左側(レンズの前方)にあり、レンズ L_2 と(レンズ L_1 でできた)像との間の距離 a_2 の前の符号は正で距離 $a_2 = D - b_1 = 16 - 12 = 4.0 \text{ cm}$ となる。さらに、レンズ L_2 の焦点距離 $f_2 = 6.0 \text{ cm}$ なので、この像は焦点よりもレンズ L_2 に近いので、レンズ L_2 でできた像とレンズ L_2 との間の距離を b_2 とすると($a_2 > f_2$)となるので、レンズ L_2 でできる像は虚像となり、「レンズの公式」で距離 b_2 の前の符号は負にする。

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

上の式から、レンズ L_2 と像の間の距離 $b_2 = a_2 f_2 / (f_2 - a_2) = 12 \text{ cm}$ となる。最終的な像は虚像で下の図のように作図することができる。レンズ L_2 による倍率は $b_2 / a_2 = 12 / 4 = 3$ 倍で、2 つのレンズによる合計の最終的な倍率は、 $2 \times 3 = 6$ 倍となる¹²⁹。



例題 3. 焦点距離 $f_1 = 4.0 \text{ cm}$ の凸レンズ L_1 と焦点距離 $f_2 = 6.0 \text{ cm}$ の凸レンズ L_2 が距離 $D = 8.0 \text{ cm}$ で同じ光軸上にある。レンズ L_1 の左に距離 $a_1 = 6.0 \text{ cm}$ の場所に置いた物体の像は 2 つの凸レンズでどのような像(実像か虚像)がどの場所にあるだろうか?

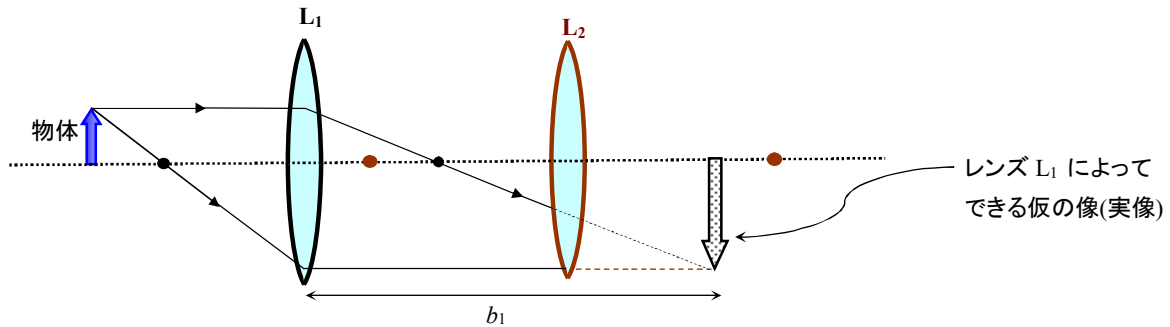


¹²⁹ このように 2 枚の凸レンズを配置した器具が望遠鏡(ケプラー式望遠鏡; 屈折望遠鏡)である。望遠鏡ではレンズ L_1 が対物レンズで物体(星)は遠距離にあり、焦点距離 f_1 が長い凸レンズを用いる。また、レンズ L_2 が接眼レンズとなる。

答; 始めに, レンズ L_1 によって像のでき方を示す. レンズ L_1 の焦点距離 $f_1=4.0$ cm, レンズ L_1 と物体との間の距離 $a_1=6.0$ cm とすると, $f_1 < a_1$ なので, 倒立実像ができる. 実像とレンズ L_1 との距離を b_1 とすると, 下のレンズの公式を用いる.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

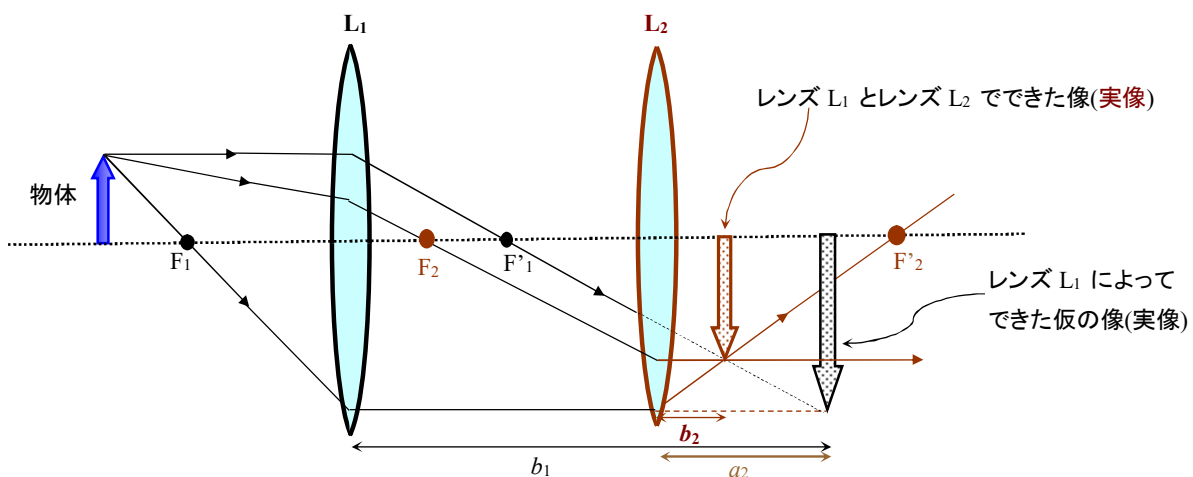
上の式から, $b_1 = a_1 f_1 / (a_1 - f_1) = 12$ cm となる(この時点で倍率は $b_1/a_1 = 12/6 = 2$ 倍となっている).



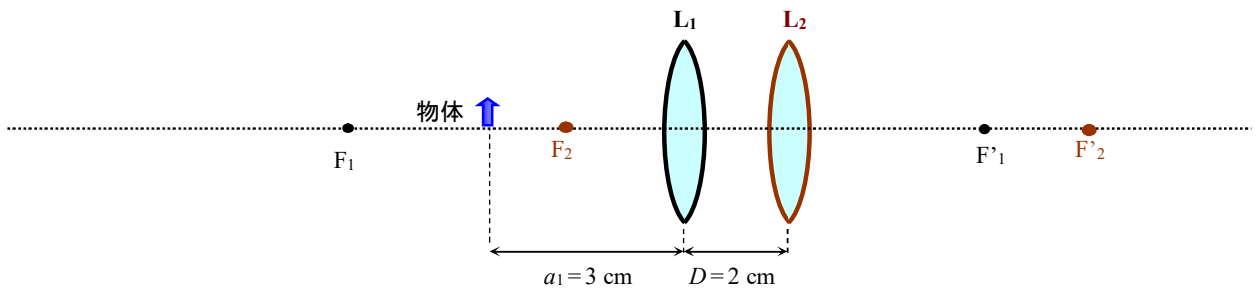
レンズ L_1 でできたこの実像はレンズ L_2 の右側にできるが, レンズ L_2 があるので実際にはできない仮の実像(この仮の実像のことを「虚光源」と呼ぶ)となる. この仮の実像を用いて, 次に, レンズ L_2 によってできる像を考えよう. この仮の実像はレンズ L_2 の右側(レンズの後方)にあるので, レンズ L_2 と(レンズ L_1 でできた)像との間の距離 a_2 の前の符号を負にする. レンズ L_2 の焦点距離 $f_2=6.0$ cm, レンズ L_2 と(レンズ L_1 でできた)像との間の距離 $a_2 = b_1 - D = 12 - 8 = 4.0$ cm となる($a_2 < f_2$). レンズ L_2 でできた像とレンズ L_2 との距離を b_2 とすると, 「 $a_2 < f_2$ 」となるので, 下のレンズの公式を用いる.

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

レンズ L_2 と像の間の距離 $b_2 = a_2 f_2 / (f_2 + a_2) = 2.4$ cm となる. したがって, 距離 b_2 は正なので, できた像は実像であり, レンズ L_2 の左側に位置する(倍率は $b_2/a_2 = 2.4/4 = 0.6$ 倍で, 元の物体と比べると, $2 \times 0.6 = 1.2$ 倍になっている). 最終的な倍率は 1.2 倍.



例題 4. 焦点距離 $f_1 = 5.0$ cm の凸レンズ L_1 と焦点距離 $f_2 = 4.0$ cm の凸レンズ L_2 が距離 $D = 2.0$ cm で同じ光軸上にある. レンズ L_1 の左に距離 $a_1 = 3.0$ cm の場所に置いた物体の像は 2 つの凸レンズでどのような像(実像か虚像)がどの場所にできるか?

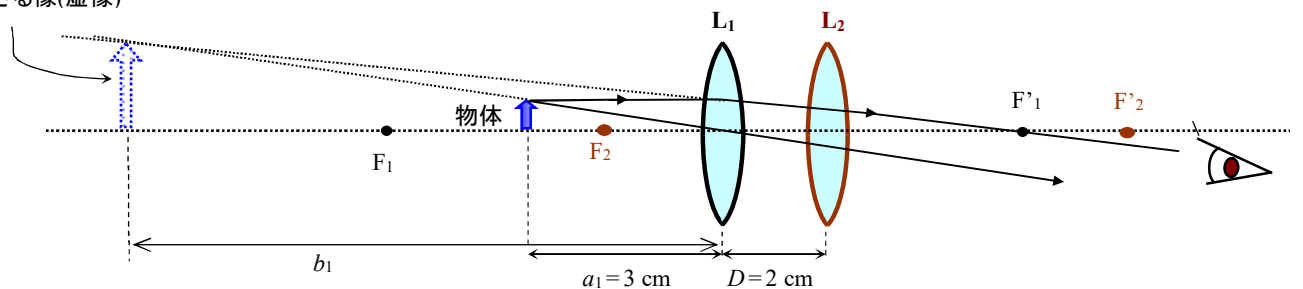


答; 最初に, レンズ L_1 によって像のでき方を示す. レンズ L_1 の焦点距離 $f_1 = 5.0$ cm, レンズ L_1 と物体との間の距離 $a_1 = 3.0$ cm とすると, $f_1 > a_1$ なので, 虚像ができる. この虚像とレンズ L_1 との距離を b_1 とすると, 下のレンズの公式を用いる.

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

上の式から, $b_1 = a_1 f_1 / (f_1 - a_1) = 7.5$ cm となる(この時点で倍率は $b_1/a_1 = 7.5/3 = 2.5$ 倍となっている).

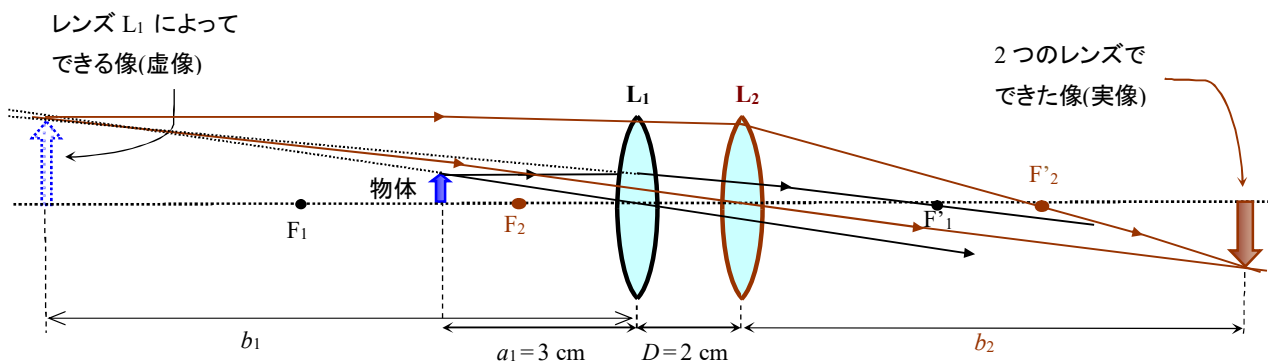
レンズ L_1 によって
できる像(虚像)



次に, レンズ L_2 による像のでき方を示す. レンズ L_1 でできた虚像はレンズ L_2 の右側にある. これを新たな像として, レンズ L_2 と(レンズ L_1 でできた)像との間の距離 $a_2 = b_1 + D = 7.5 + 2 = 9.5$ cm, レンズ L_2 の焦点距離 $f_2 = 4.0$ cm となる($a_2 > f_2$). レンズ L_2 でできた像とレンズ L_2 との距離を b_2 とすると, 「 $a_2 > f_2$ 」となるので, 下のレンズの公式を用いる.

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

レンズ L_2 と像の間の距離 $b_2 = a_2 f_2 / (a_2 - f_2) \sim 6.91$ cm となる. したがって, 距離 b_2 は正なので, できた像は実像であり, レンズ L_2 の左側に位置する(倍率は $b_2/a_2 = 6.91/9.5 \sim 0.73$ 倍). 最終的な倍率は, $(b_2/a_2) \times (b_1/a_1) = (f_2/(a_2 - f_2)) \times (f_1/(f_1 - a_1)) = 1.8182 \sim 1.8$ 倍となる.



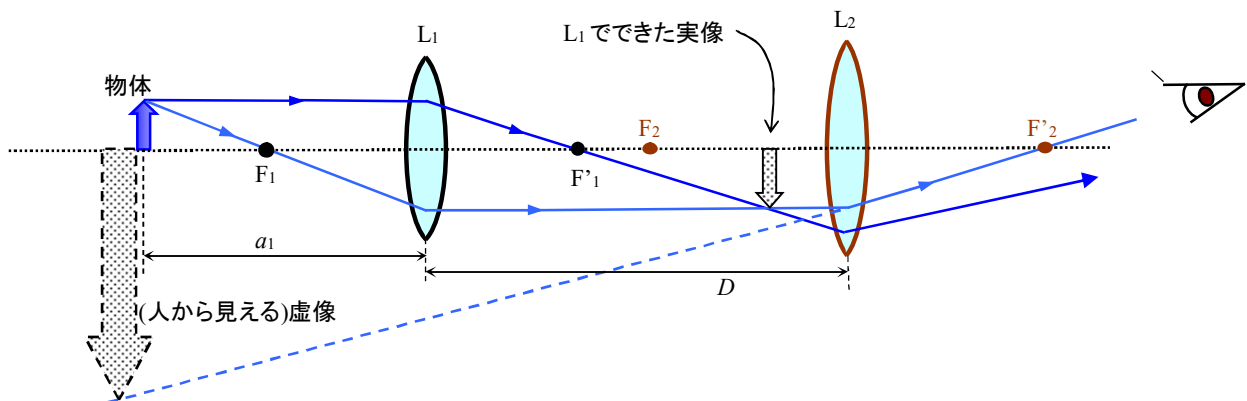
* 2つの凸レンズが接近している場合($D \sim 0$)

このなかで、2つの凸レンズが接近していて、レンズの間の距離 $D \ll b_1, a_2$ となる場合を考えてみよう。このとき、レンズ L_2 と像との間の距離 $a_2 = b_1 + D \sim b_1$ と近似でき、2つのレンズの公式より、下の式が導出できる。

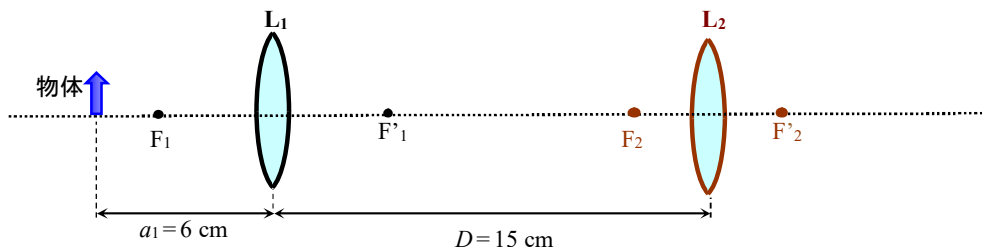
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

上の式の右辺について、「 $1/f_1 + 1/f_2 = 1/f$ 」を満たす2つのレンズの合成した焦点距離 f を導入するとした1つの凸レンズに対するレンズの公式になる。

- 問 12-4-1. 2つの凸レンズがある。同一光軸上に焦点距離が f_1, f_2 となる凸レンズ L_1 と L_2 を距離 D だけ離して置き、レンズ L_1 の左側に距離 a_1 の位置に物体を置いたところ、下の図のように虚像が見えた。このとき、目から見える虚像の(実際の物体に対する)倍率を求めよ¹³⁰。



- 問 12-4-2. 焦点距離 $f_1 = 4.0$ cmと焦点距離 $f_2 = 2.0$ cmの2つの凸レンズ L_1, L_2 を距離 $D = 15.0$ cm離して置いた。レンズ L_1 の左に距離 $a_1 = 6.0$ cmの場所に置いた物体の像は L_1 と L_2 の2つのレンズで、どの場所にどのような像ができるか(実像か?虚像か?)。また、その2つのレンズの屈折の様子を図で示せ。



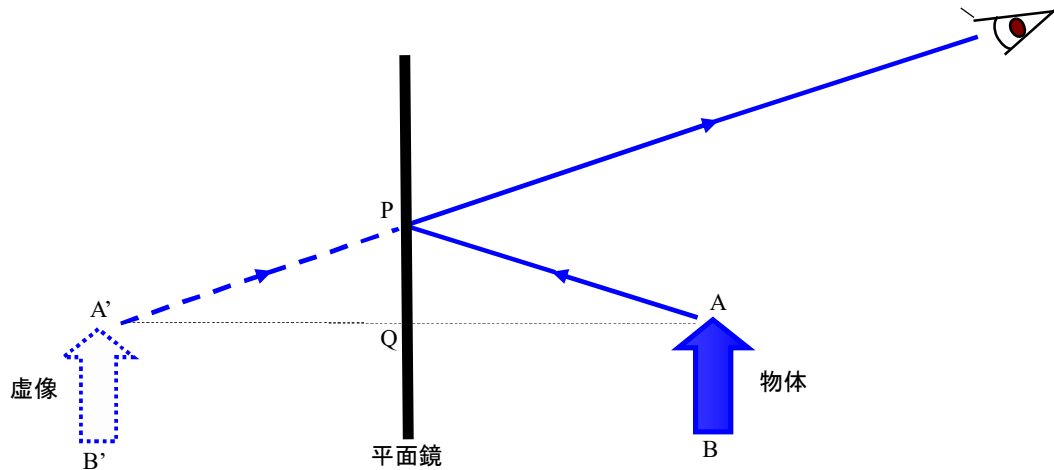
¹³⁰ このように2枚の凸レンズを配置した器具が顕微鏡である。顕微鏡ではレンズ L_1 が対物レンズで、レンズ L_2 が接眼レンズとなる。

12-5. 鏡による像

鏡には、平面鏡、凸面鏡、凹面鏡がある。これらの鏡を用いてできる像について考えてみよう。

・平面鏡による反射光と虚像

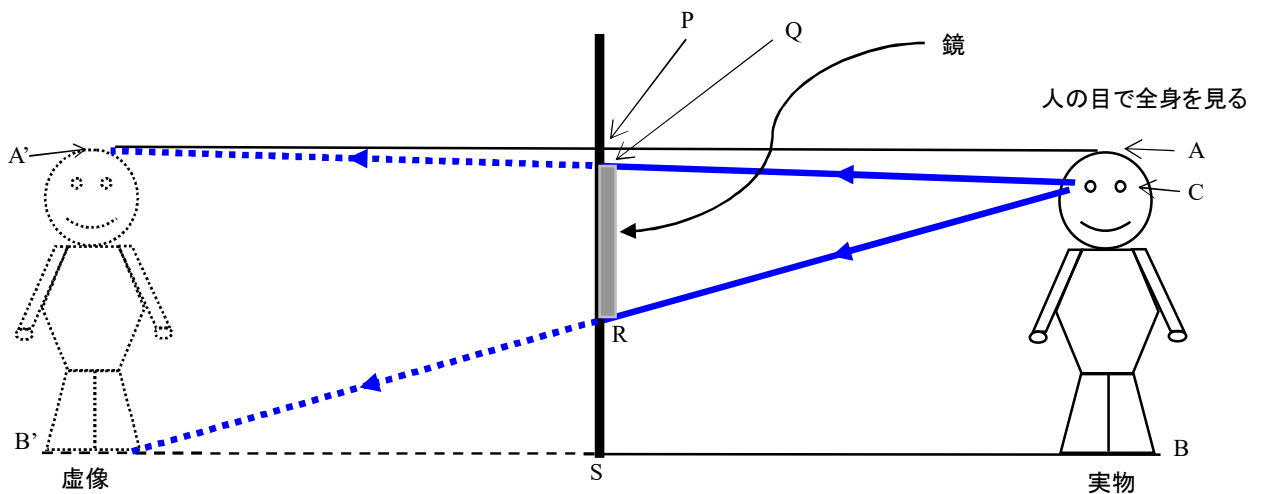
物体を平面鏡の前に置いて、それを目で見よう。この状況では、光線は下の図のように目に入り、目で物体の像を見ている。人は目に入った光線(点線の矢印で表された線)の方向に物体があると感じる。この像は実際には存在しないので**虚像**となる。



平面鏡では、鏡から物体までの距離と虚像までの距離は等しい(→ $AQ = A'Q$)¹³¹。平面鏡を使って像を見たとき、その大きさは実際の物体と同じ大きさに見え、 $A'B'$ が物体の像(虚像)として見える。物体と虚像は同じ大きさ($AB = A'B'$)に見えるので倍率は1倍となる。

例題 1. 身長 170 cm の人が鏡を使って全身を見るために鏡の大きさを何 cm にすればよいか？ また、鏡は床から何 cm 上に設置すればよいか？ ただし、目は頭の上から 10 cm だけ下についているとする。

答； 人(目の位置に注意)、壁に立てかけた鏡、虚像を下図に描く。 $A'B'$ を虚像の人の高さ、点 C は目の位置、QR は鏡の大きさ、RS は床からの鏡の位置とする($AB = A'B' = 170$ cm, $CB = 160$ cm)。



¹³¹ $\triangle PAQ$ と $\triangle PA'B'$ は左右対称であるが合同である。したがって、 $AQ = A'Q$ が成立する(理由: ① A から出て鏡で反射した光は入射角と反射角が等しいので $\angle PAQ = \angle PA'Q$, ② PQ は共通, ③ $\angle PQA = \angle PQA' = 90^\circ$, より)

人の目から出た光線は鏡の上端と下端を通過して、虚像となる人の頭と足を写す。虚像と実際の物体間の距離は同じなので、 $AP = A'P$ となる。 $\triangle CB'B$ と $\triangle RB'S$ は辺の比 2:1 の相似な三角形となるので、 $RS = CB'/2 = 80$ cm. 同様に、 $\triangle ACA'$ と $\triangle PAQ'$ も 2:1 の相似な三角形となるので、 $PQ = AC/2 = 5$ cm. したがって、鏡の大きさ QR は下のようにして求めることができる。

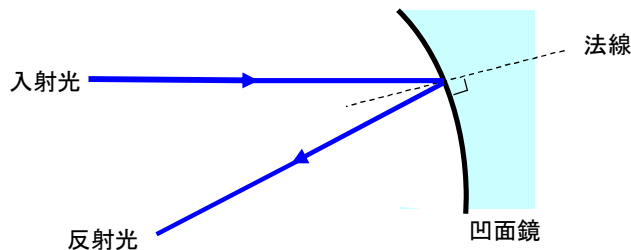
$$QR = PS - PQ - RS = 170 - 80 - 5 = 85 \text{ cm}$$

床から 80 cm の位置に 85 cm 以上の長さをもつ鏡が必要である。

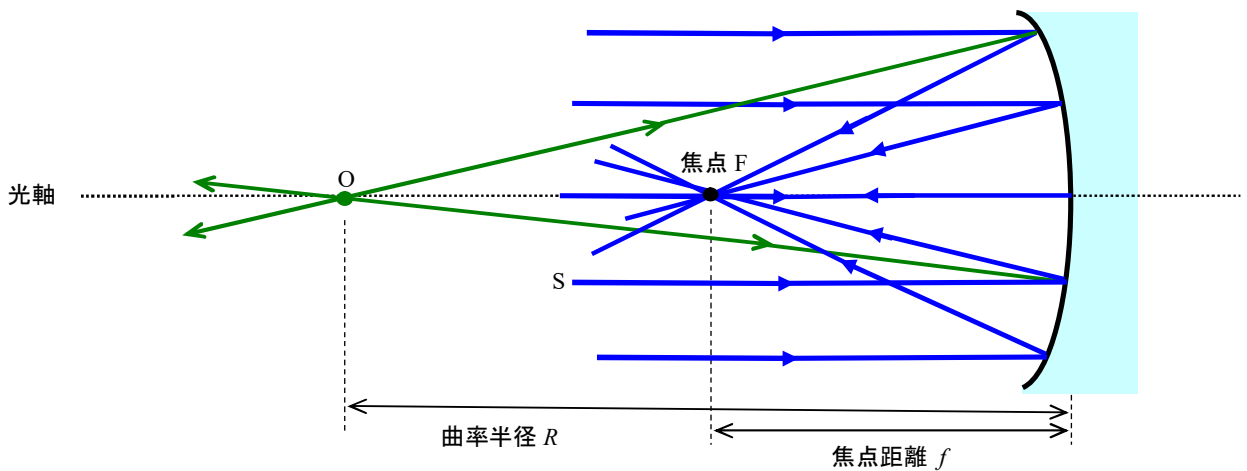
・凹面鏡による像

球面の内側に鏡面が配置されている鏡を凹面鏡と呼ぶ。凹面鏡に入射した光は「反射の法則(入射角=反射角)」に従って反射する。反射光は凹面鏡の中央部に向かって進む。

光軸



入射光として平行光線を用いると、凹面鏡の中央部は入射角がより小さくなるので、反射角もより小さくなり、反射光が 1 か所に集光する場所ができる。レンズの場合と同様、この場所を焦点 F と呼び、焦点 F と凹面鏡の間の距離を焦点距離 f と呼ぶ。また、凹面鏡の鏡面を理想的な円とした場合、その円の中心を O とし、点 O から出た入射光は凹面鏡の鏡面での入射角は恒に 90° となるので、反射光は点 O に反射される(例えば、 OQ は球面の法線方向にあり、入射角と反射角が等しいので、 $\angle SQO = \angle OQF$)。円の曲率半径 R は焦点距離 f と(12-5-1)式の関係が近似的に成り立つ。



$$R = 2f$$

(12-5-1)

* (12-5-1)式の導出

(仮定: PQ の長さ $h \ll R, h \ll f$ で, $\angle FPQ \cong 90^\circ$ と近似できる)

焦点 F から出て点 Q に入射した光は, 反射の法則より, $\angle FQO = \angle OQS$ を満たすように反射し, 反射光 QS は光軸と平行となる. $\angle FOQ = \angle OQS = \angle FQO$ より, $\triangle FOQ$ は二等辺三角形となり, $OF = QF$ となる.

一方, $\triangle FPQ$ は直角三角形なので, $QF = \sqrt{(FP)^2 + (PQ)^2} = \sqrt{f^2 + h^2} = f\sqrt{1 + (h/f)^2} \cong f(1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{f^2}) = f + \frac{h^2}{2f}$

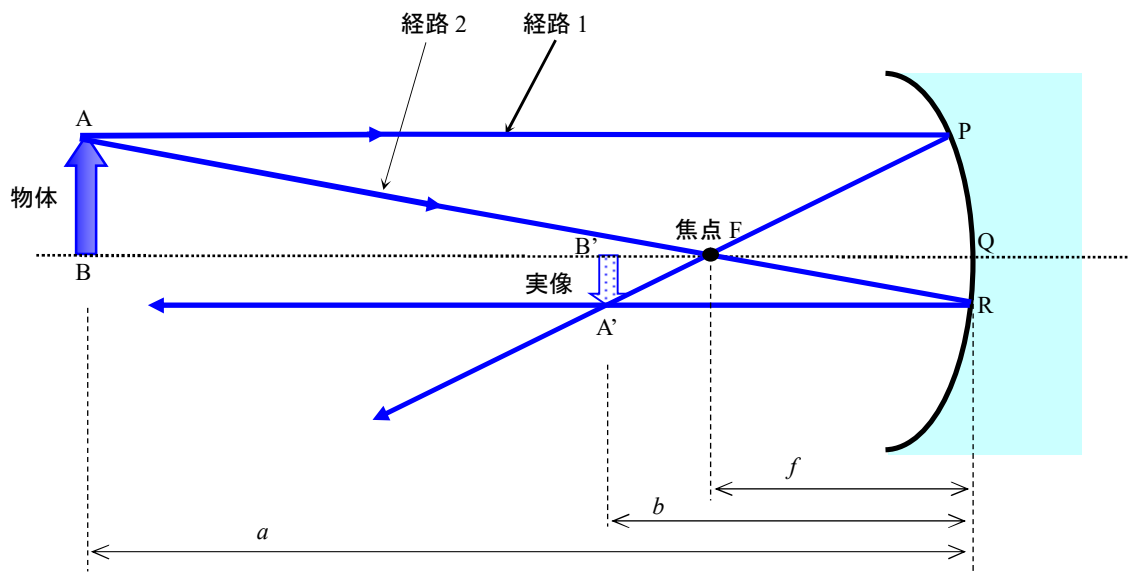
となる. したがって, 曲率半径 $R = OP = OF + FP = QF + FP \cong f + \frac{h^2}{2f} + f \cong 2f$ と近似できる.

① 実像ができる場合

下の図のように, 焦点 F より遠い場所に物体を置く(物体と凹面鏡の間の距離 = a). このとき, 下の図のように, 物体から出た光は 1 か所に集まって, 倒立した**実像**を作り(実像と凹面鏡の間の距離 = b), 下のレンズの公式が成立する.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (12-5-2)$$

$$\text{実像の倍率} = \text{実像の大きさ/元の物体の大きさ} = |A'B'/AB| = b/a \quad (12-5-3)$$



上の図における光の経路はそれぞれ下のようになる.

経路 1: 物体の先端から出た光は光軸と平行に進み, 凹面鏡に入射する. 反射光は焦点 F を通過する.

経路 2: 物体の先端から出た光焦点 F を通過した後, 凹面鏡に入射する. 反射光は光軸と平行となる.

* (12-5-2)式の導出

(仮定;凹面鏡の曲率はゆるやかなものとし, 点 P, Q, R は縦に1直線状にあるものとする

$$\rightarrow AP = BQ = a, A'Q = B'R = b, PQ = AB, RQ = A'B', \angle BQP = \angle BQR \cong 90^\circ$$

$$\triangle RQF \text{ と } \triangle ABF \text{ は相似} \rightarrow |RQ/AB| = |FQ/FB| = f/(a-f)$$

$$\triangle A'B'F \text{ と } \triangle PQF \text{ は相似} \rightarrow |A'B'/PQ| = |B'F/QF| = (b-f)/f$$

$$RQ = A'B', QP = AB \text{ より上の2式は等号で結ばれる.} \rightarrow f/(a-f) = (b-f)/f \rightarrow ab = f(a+b)$$

$$\rightarrow ab/(a+b) = f \rightarrow (\text{逆数をとる}) \rightarrow 1/a + 1/b = 1/f \rightarrow (12-5-2) \text{式}$$

* 倍率

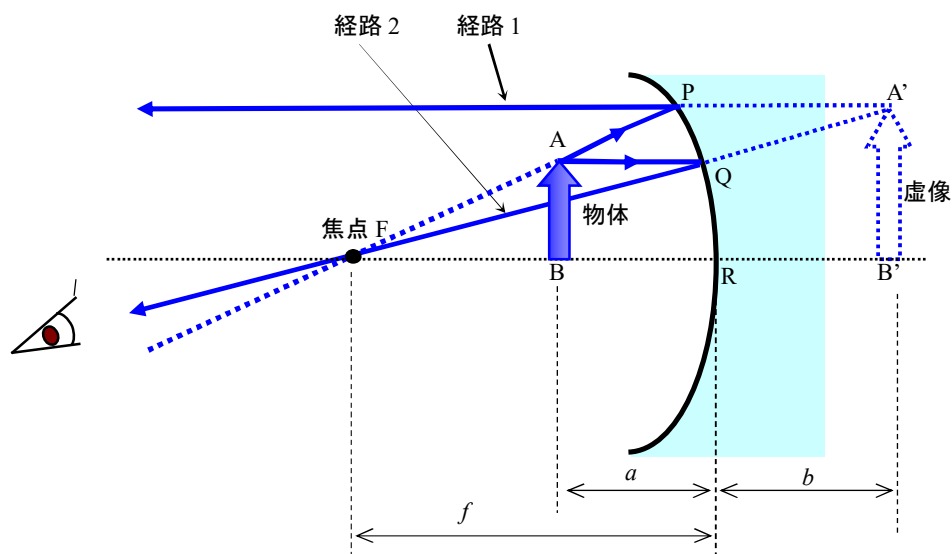
$$|A'B'/AB| = |RQ/AB| \rightarrow \text{焦点距離 } f \text{ に(12-5-1)式を変形して代入} \quad |RQ/AB| = b/a$$

② 虚像ができる場合

次に, 焦点 F より鏡に近い場所に物体を置く(物体と凹面鏡の間の距離 = a). この場合は, 下の図のように, 凹面鏡の内部(鏡の表面から奥に距離 b の位置)に正立した虚像ができ, 下のレンズの公式が成立する.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{12-5-4}$$

$$\text{虚像の倍率} = |A'B'/AB| = b/a \tag{12-5-5}$$



上の図における光の経路はそれぞれ下のようになる.

経路1: (焦点 F からの延長線上にある)物体の先端から出た光は点 P で, 凹面鏡で反射した後, 光軸と平行になる.

経路2: 物体の先端から出た平行光は点 Q で, 凹面鏡で反射した後, 焦点 F を通過する.

目を QF の延長線上に配置すると, 凹面鏡の奥に正立した虚像が見える.

* (12-5-4)式の導出

(仮定:凹面鏡の曲率はゆるやかなものとし, 点 P, Q, R は縦に 1 直線状にあるものとする

$$\rightarrow AQ = BR = a, PA' = RB' = b, QR = AB, PR = A'B'$$

$$\triangle FPR \text{ と } \triangle FAB \text{ は相似} \rightarrow |PR/AB| = |FR/FB| = f/(f-a)$$

$$\triangle A'B'F \text{ と } \triangle QRF \text{ は相似} \rightarrow |A'B'/QR| = |B'F/RF| = (b+f)/f$$

$$PR = A'B', QR = AB \text{ より上の 2 式は等号で結ばれる.} \rightarrow f/(f-a) = (b+f)/f \rightarrow ab = f(b-a)$$

$$\rightarrow 1/a + 1/b = 1/f = (b-a)/(ab) \rightarrow (12-5-4) \text{式}$$

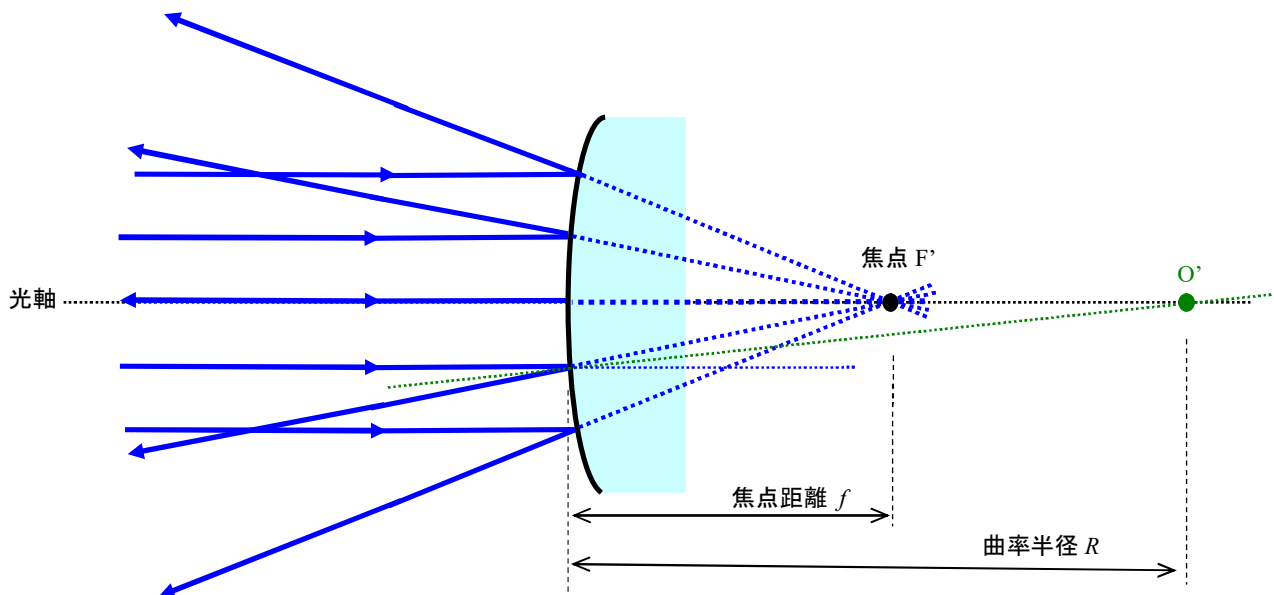
* 倍率

$$|A'B'/AB| = |A'B'/QR| \rightarrow \text{焦点距離 } f \text{ に(12-5-3)式を変形して代入 } |A'B'/QR| = b/a$$

問12-5-1. 焦点距離 $f=25$ cm の凹面鏡がある. この凹面鏡から, 距離 $a_1=30$ cm に置いたときと距離 $a_2=20$ cm に大きさ 2.0 cm の物体を置いたときにできる像の位置, 像の種類, 像の大きさを求めよ.

・凸面鏡による像

球面の外側に鏡面が配置されている鏡を凸面鏡と呼ぶ. 凸面鏡に入射した光は「反射の法則」に従って反射するので, 反射光は外側に広がる. 平行光線を凸面鏡に入射させると, 反射光は鏡面内のある一か所の点から出ているように見える. この光が一点から出ているように見える点を焦点 F' と呼ぶ. 鏡面を理想的な球面とすると, 鏡面は中心 O' から曲率半径 R の円周上にある. 凹面鏡と同様に, 焦点距離 f と曲率半径 R は, 「 $R=2f$ 」の関係が近似的に成り立つ.



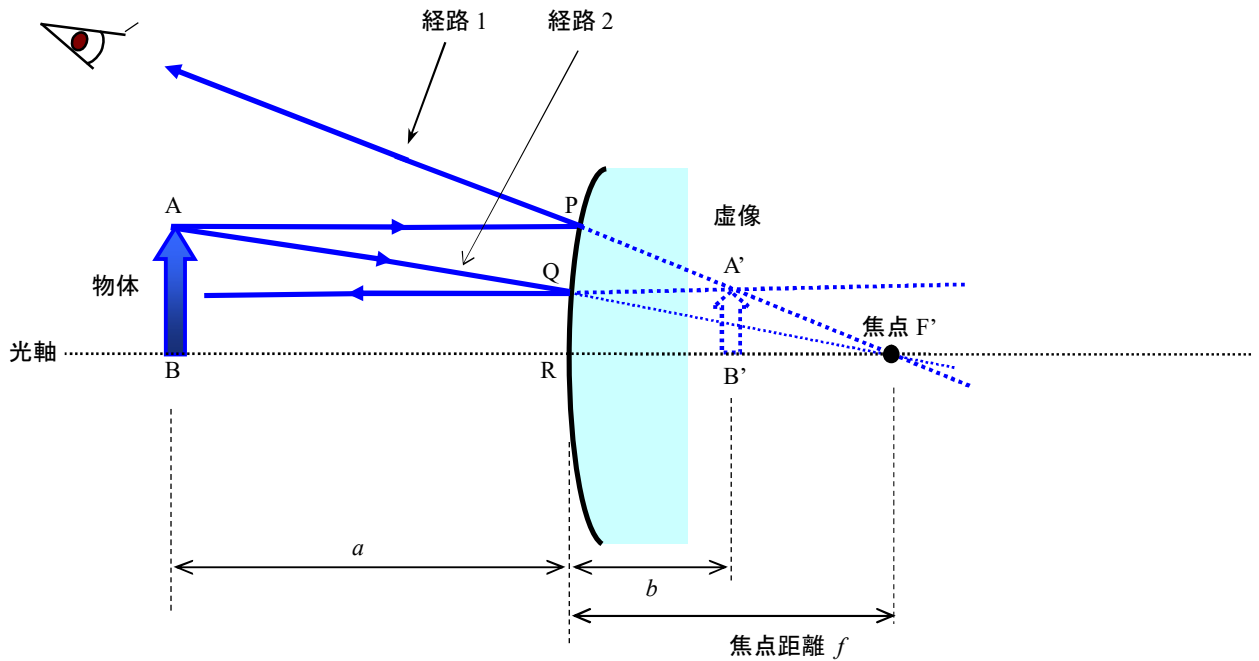
下の図のように, 凸面鏡の前に物体を置くとその位置によらず凸面鏡の内部(鏡の表面から奥に距離 b の位置)に正立した虚像ができ, 下のレンズの公式が成立する.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$$

(12-5-6)

$$\text{虚像の倍率} = |A'B'/AB| = b/a$$

(12-5-7)



上の図における光の経路はそれぞれ下のようになる。

経路1: 物体の先端から出た光は平行光として点Pで凸面鏡に入射し、反射する。反射光を延長した先には焦点F'がある。

経路2: 物体の先端から出た光は点Qで凸面鏡に入射し、反射する(入射光の延長線上には焦点F'がある)。点Qで反射した光は平行光となる。平行光を鏡内に延長すると虚像の先端にあたる。

* (12-5-6)式の導出

(仮定: 凸面鏡の曲率はゆるやかなものとし、点P, Q, Rは縦に1直線状にあるものとする)

$$\rightarrow AP = BR = a, RB' = QA' = b, PR = AB, QR = A'B'$$

$$\triangle QRF' \text{と} \triangle ABF' \text{は相似} \rightarrow |QR/AB| = |RF'/BF'| = f/(f+a)$$

$$\triangle A'B'R \text{と} \triangle PRF' \text{は相似} \rightarrow |A'B'/PR| = |B'F'/RF'| = (f-b)/f$$

$$QR = A'B', PR = AB \text{ より上の2式は等号で結ばれる。} \rightarrow f/(f+a) = (f-b)/f \rightarrow ab = f(a-b)$$

$$\rightarrow (a-b)/(ab) = 1/f \rightarrow (12-5-6) \text{式}$$

* 倍率

$$|A'B'/AB| = |A'B'/PR| \rightarrow \text{焦点距離} f \text{に(12-5-6)式を変形して代入} |A'B'/PR| = b/a$$

問12-5-2. 焦点距離 $f=25$ cmの凸面鏡がある。この凸面鏡から、距離 $a_1=30$ cmに置いたときと距離 $a_2=20$ cmに大きさ2.0 cmの物体を置いたときにできる像の位置、像の種類、像の大きさを求めよ。

・まとめ

凹面鏡, または凸面鏡の左側に物体を置き, 物体と鏡面の間の距離 = a , 鏡面とできた像の間の距離 = b , 凹面鏡(凸面鏡)の焦点距離 = f とすると, レンズの場合と同じように, 下の式で表される「球面鏡の公式」が成り立つ.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\pm b} = \frac{1}{\pm f} \quad (12-5-8)$$

各々の距離 a , b , f の前につく符号(+ か -)は下の表のようにして決まる. ここで, 物体は球面鏡の左側に置くので距離 a の前の符号は「+」にする. 距離 b の前の符号は実像ができる場合($a > f$)は「+」にし, 虚像ができる場合($a < f$)は「-」にとる. 凹面鏡の場合は焦点距離 f を「+」にし, 凸面鏡の場合は「-」にとる.