

9. 電磁波の性質

(高専4年以上を対象; 興味がある学生以外は省略してよい)

8章では、4つの方程式からなる「**マクスウェル方程式**」を示した。これらのマクスウェル方程式からの帰結として、マクスウェルは電磁波(Electromagnetic wave)の存在を予言した。ヘルツ¹は1887年に行った電磁波の発信・受信の実験を行って、電磁波の存在を確認した。また、8章の「8-4. 電磁波の基礎」では電磁波の基本的な性質として、電磁波は「横波」であることを示し、電磁波の伝搬の仕組みについて説明した。この章では、電磁波の性質として、電磁波の「偏光」と「反射・屈折の法則」について、電場と磁場に関する境界条件を適用することで導出する。電磁波においても、一般的な「波の反射・屈折の法則²」と同じ性質を持つが、「偏光」を伴うことにより、その特性が現れる。

9-1. 偏光(偏波)

「8-4. 電磁波の基礎」では、位置 \vec{r} 、時刻 t における電磁波の電場 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ が三角関数で表現でき、電磁波が平面波で、 $+x$ 方向に進む場合、その電場 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ は、(8-4-15)式のように波の進行方向の位置(ここでは、 x)と時刻 t の関数として表すことができる。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (8-4-15)$$

位置 x 、時刻 t によらない電場の成分を $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ とした(実際の電磁波としての電場 \vec{E} は上式の実部、または虚部を採用する)。上の(8-4-15)式に対し、ガウスの法則「 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ 」を適用すると、(8-4-16)式に示したように、電磁波の進行方向となる x 成分「 $E_{0x} = 0$ 」となる。つまり、電磁波は**横波**である。したがって、(8-4-17)式で示したように、電磁波の電場 $\vec{E}(x, t)$ は下の式で表すことができる。

$$\vec{E}(x, t) = (0, E_{0y}, E_{0z}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (9-1-1)$$

上の式で示したように、電場 \vec{E}_0 の y 成分 E_{0y} と z 成分 E_{0z} の2つの成分(2つの成分にはその大きさ(振幅)と位相角が含まれる)は独立となるので、**2つの自由度**を持つ。光を含む電磁波の電場は進行方向に対して垂直面方向(2成分、ここでは y 成分と z 成分)を持ち、電場 \vec{E}_0 の y 成分 E_{0y} と z 成分 E_{0z} に対し、その絶対値(振幅)と位相角(δ_y と δ_z)を用いて下の式で表すことができる。

$$E_{0y} = |E_{0y}| \exp(i\delta_y), \quad E_{0z} = |E_{0z}| \exp(i\delta_z) \quad (9-1-2)$$

このとき、電場 \vec{E} の y 成分 E_y と z 成分 E_z は下の式で表すことができる。

$$E_y(x, t) = |E_{0y}| \exp(i(\omega t - kx + \delta_y)), \quad E_z(x, t) = |E_{0z}| \exp(i(\omega t - kx + \delta_z)) \quad (9-1-3)$$

電磁波の電場は進行方向に対して垂直面方向(2成分)については、独立なので、2つの成分は偏った状態をとることができる。このような偏った状態を電磁波の「**偏光(Polarization)**」と呼ぶ³。偏光の状態として、位相角(δ_y と δ_z)が同じか、 π ずれた状態を「**直線偏光**」と呼び、それ以外を「**円偏光**、または**楕円偏光**」と呼ぶ。以下にこれらの性質を示す(ここでは、円偏光と楕円偏光を分けて示す)。一方、磁場 \vec{H} は電場と直交するように $+x$ 方向に進むが、ここでは簡単のために電場についてのみ説明する。

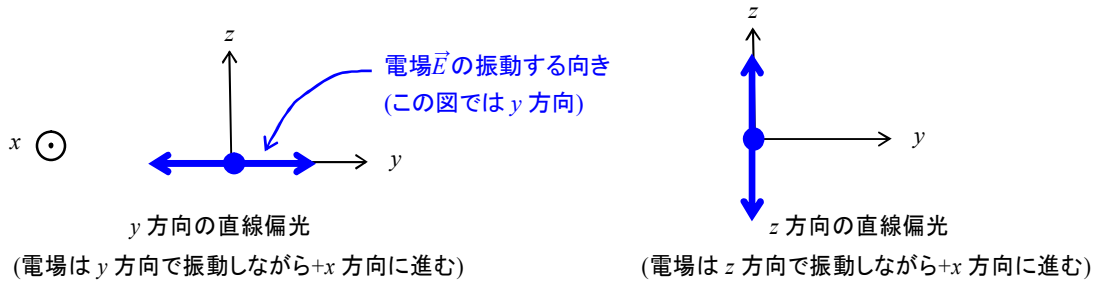
・直線偏光

例えば、下の図のように、紙面に垂直な向きを x 方向にとると、 z 成分 $E_{0z} = 0$ となる場合は、電場は y 成分のみで振動する。また、 y 成分 $E_{0y} = 0$ となる場合は、電場は z 成分のみで振動する。これをそれぞれ、「電場の y 方向の直線偏光」と「電場の z 方向の直線偏光」と呼ぶ。このときは1つの成分のみとなるので、位相角(δ_y か δ_z)は任意の値をとってもその性質は変わらない。

¹ ヘルツ(Heinrich Rudolf Hertz)は19世紀ドイツの物理学者でマクスウェルの電磁気学を発展させた。彼の名にちなんで周波数(回転数、振動数)の単位を「Hz (ヘルツ)」とした。

² 著者によるテキスト、2年生の力学「11章 波(11-8 反射と屈折)」で示されている。

³ 主に、光の場合を「偏光」、電磁波(電波)の場合を「偏波」と呼ぶ。ここでは、以後「偏光」と呼ぶ。



8章の「8-4. 電磁波(Electromagnetic wave)の基礎」と「8-5. ポインティングベクトル(Poynting vector)」において、図示した電磁波はz方向の直線偏光に相当する。

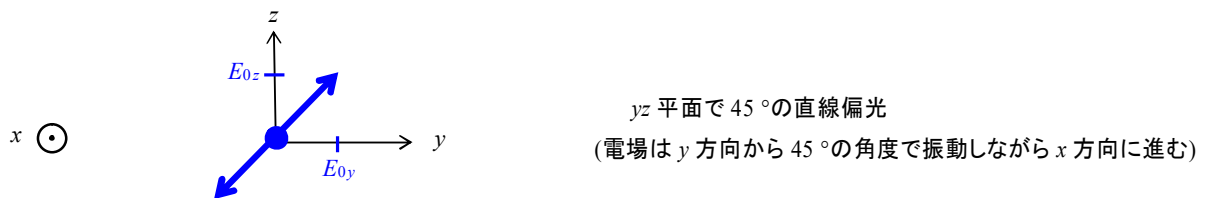
y成分 E_{0y} とz成分 E_{0z} の両方が存在する場合でなおかつ、2つの位相角の差 $\delta = 0$, (or π)となるときは、x方向からある角度で斜めに電場がyz平面上で往復してx方向に進む直線偏光となる。

$$\delta = \delta_z - \delta_y = 0, \text{ (or } \pi) \tag{9-1-4}$$

この場合の電磁波の振幅 E_0 は下の式で表すことができる。

$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} \tag{9-1-5}$$

例えば、位相角の差 $\delta = 0$ で、2つの振幅が等しい($E_{0y} = E_{0z}$)場合は、yz平面上で45°の直線偏光となり、振幅 $E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} = \sqrt{2} E_{0y}$ となる(位相角の差 $\delta = \pi$ で、2つの振幅が等しい場合は、yz平面上で135°の直線偏光となる)。



また、位相角の差 $\delta = 0$ で、2つの振幅が「 $\sqrt{3} E_{0y} = E_{0z}$ 」となる場合は、yz平面上で60°の直線偏光となり、振幅 $E_0 = 2 E_{0y}$ となる。

・円偏光

2つの振幅が等しく($E_{0y} = E_{0z}$)、位相差 $\delta = \delta_z - \delta_y = \pi/2$ 、または $-\pi/2$ となる場合、円偏光となる。例えば、位相差 $\delta = -\pi/2$ を(9-1-3)式に代入し、その実部をとると下の式となる($\delta_z = \delta_y + \delta$)。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y(x, t) = |E_{0y}| \cos(\omega t - kx + \delta_y) \tag{9-1-6a} \\ E_z(x, t) = |E_{0z}| \cos(\omega t - kx + \delta_y - \pi/2) = |E_{0y}| \sin(\omega t - kx + \delta_y) \tag{9-1-6b} \end{array} \right.$$

電場のz成分は電場のy成分から見て、位相角 $\pi/2$ だけ遅れるようにしてx方向に進む。ここで、合成電場 \vec{E} は下の式で表すことができる。

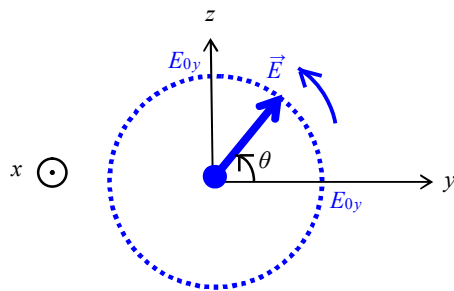
$$\vec{E} = |E_{0y}| \cos(\omega t - kx + \delta_y) \vec{e}_y + |E_{0y}| \sin(\omega t - kx + \delta_y) \vec{e}_z \tag{9-1-7}$$

上の式は位置 x 、時刻 t での位相角 θ とすると、下の式で表すことができる。

$$\theta = \omega t - kx + \delta_y \quad (9-1-8)$$

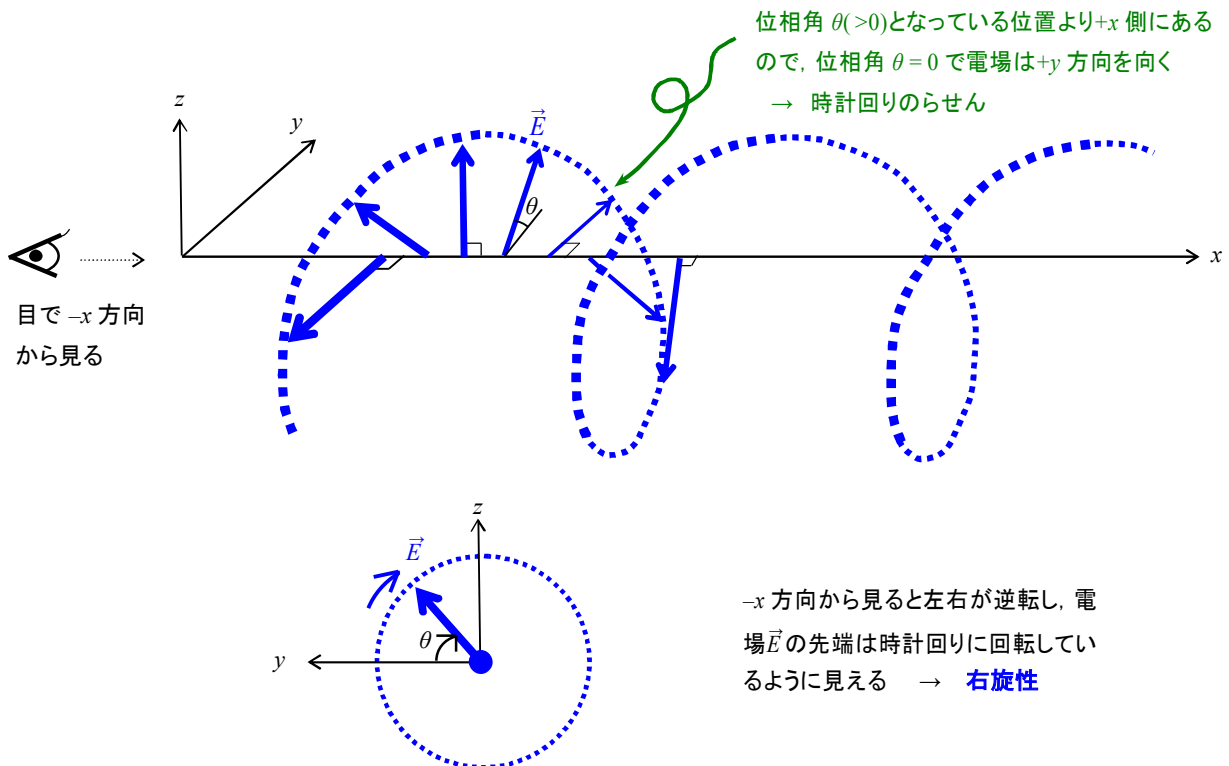
$$\vec{E} = |E_{0y}| \cos \theta \vec{e}_y + |E_{0y}| \sin \theta \vec{e}_z \quad (9-1-9)$$

位置 x を固定して電場 \vec{E} を観測してみよう。位相角 θ は(9-1-8)式にしたがい、時刻 t が増加するのに伴って増える。したがって、このとき、電場のベクトルとしての先端は、 yz 平面上で半径 $|E_{0y}|$ の円周上を反時計回りに回転するように時間変化する。このように、電場ベクトルの終点が円周上を回転するような偏光の状態を「**円偏光**」と呼ぶ。 yz 平面上で原点上に立つ(原点 O から $+x$ 方向を頭にするようにして立つ)と、 yz 平面上の反時計回りは人間の左手方向に回ることになるので、時間経過に伴って、位相角 θ が増加し**反時計回り**の回転する(なお、電気電子情報工学では紙面の裏($-x$ 方向)から見ると、逆回転になり時計回りにみえるので、この向きを「**右旋性(右回りの回転)**」⁴と呼んでいる)。



yz 平面上で**円偏光**
(電場ベクトルとしての先端は位置 x を固定すると yz 平面上で時刻 t の経過とともに反時計回りに回転する → $-x$ から見て**右旋性**)

一方、ある時刻で電磁波を観測すると、(9-1-8)式より位置 x の増加に伴い位相角 θ は減少するので、下の図のように電場を表す矢印の終点は位置の関数 x として、時計回りのらせんを描く。



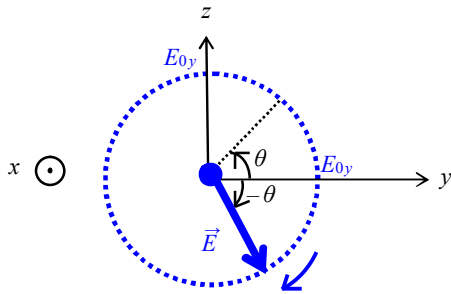
$-x$ 方向から見ると左右が逆転し、電場 \vec{E} の先端は時計回りに回転しているように見える → **右旋性**

⁴ 紛らわしいが、電気電子情報工学会(IEEE)では、このように定義している。また、右手まわりとは、右手で x 軸から y 軸に回転するとき、右手で回すネジ(右ネジ)が進む向きを $+z$ 方向としている。このような言い方をする場合もあるので、混乱しないようにしたい(実際、混乱している教科書もある)。また、日本では、時計回りの回転を右回転と定義している(xy 平面の原点に立ったとき、右手方向への回転が時計回り)。分野によって、右偏光と左偏光の定義が異なるようである。

次に、位相差 $\delta = \delta_z - \delta_y = \pi/2$ となる場合は、電場 \vec{E} は下の式で表される。

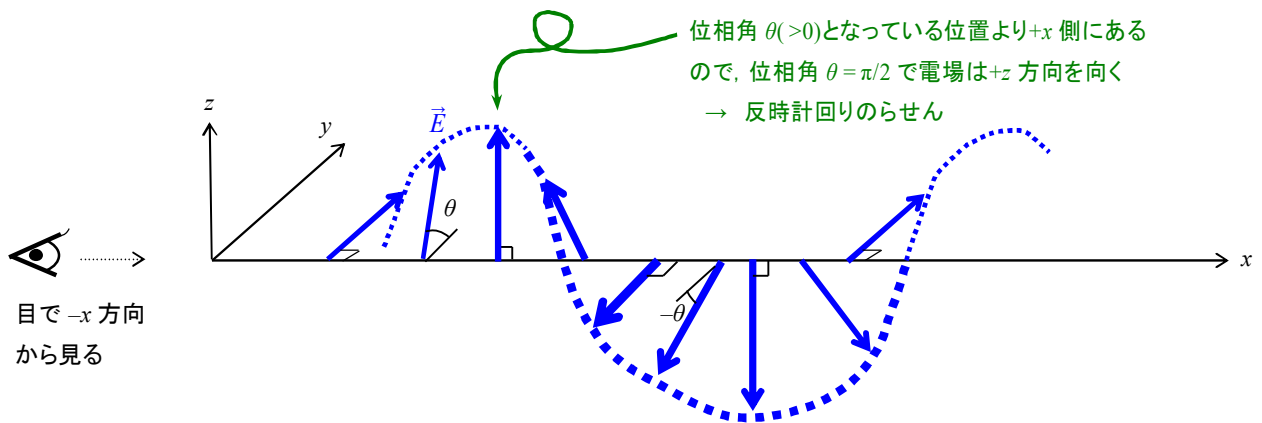
$$\begin{aligned} \vec{E} &= |E_{0y}| \cos \theta \vec{e}_y + |E_{0y}| \cos (\theta + \delta) \vec{e}_z = |E_{0y}| \cos \theta \vec{e}_y + |E_{0y}| \cos (\theta + \pi/2) \vec{e}_z \\ &= |E_{0y}| \cos \theta \vec{e}_y - |E_{0y}| \sin \theta \vec{e}_z = |E_{0y}| \cos (-\theta) \vec{e}_y + |E_{0y}| \sin (-\theta) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (9-1-10)$$

上の式より、位置 x を固定すると、時刻とともに位相角 θ が増大するが、電場の位相角は「 $-\theta$ 」となるので、電場の向きを表す矢印の先端は、時計回りに回る⁵。



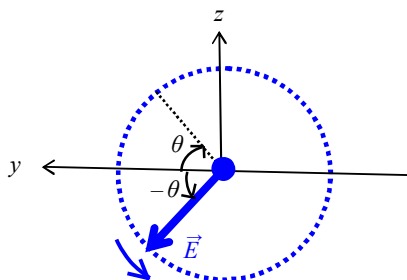
yz 平面上で円偏光
(電場は、位置 x を固定すると yz 平面上で時刻 t の経過とともに時計回り(左手の向き)に回転する $\rightarrow -x$ から見て左旋性)

同様に、ある時刻でこの電磁波を観測すると、(9-1-10)式より位置 x の増加に伴い位相角 θ は増大するので、下の図のように電場を表す矢印の終点は位置の関数 x として、反時計回りのらせんを描く。



位相角 $\theta (> 0)$ となっている位置より $+x$ 側にあるので、位相角 $\theta = \pi/2$ で電場は $+z$ 方向を向く \rightarrow 反時計回りのらせん

目で $-x$ 方向から見る



$-x$ 方向から見ると左右が逆転し、電場 \vec{E} の先端は反時計回りに回転しているように見える \rightarrow 左旋性

⁵ 位相差 $\delta = \delta_z - \delta_y = -\pi/2$ のとき、ある時刻で、 $+x$ 方向に時計回りに回転するらせん状態で、位置を固定すると時間経過と共に反時計回りに回転することを示したが、これは電場の y 成分を $\cos (\omega t - kx + \delta_y)$ 、 z 成分を $\cos (\omega t - kx + \delta_y + \delta)$ と表現しているため(指数関数表示では $e^{i(\omega t - kx + \delta_y)}$ と $e^{i(\omega t - kx + \delta_y + \delta)}$)、位相角の表示を変えて、 y 成分を $\cos (kx - \omega t + \delta_y)$ 、 z 成分を $\cos (kx - \omega t + \delta_y + \delta)$ (指数関数表示では $e^{i(kx - \omega t + \delta_y)}$ と $e^{i(kx - \omega t + \delta_y + \delta)}$) と表現した場合は、回転する向きは逆向きへ変更される。さらに、位相差 $\delta = \delta_y - \delta_z$ とした場合も回転の向きが変更される。

・楕円偏光 (さらに、数式が複雑になるので省略してよい)

電場の y 成分と z 成分を表す(9-1-3)式のまま、一般化した場合について考えてみよう。一般化すると(9-1-3)式は下の式のように表すことができる。

$$\begin{cases} E_y(x, t) = |E_{0y}| \cos(\omega t - kx + \delta_y) = |E_{0y}| \cos \theta & (9-1-11a) \\ E_z(x, t) = |E_{0z}| \cos(\omega t - kx + \delta_y + \delta) = |E_{0z}| \cos(\theta + \delta) & (9-1-11b) \end{cases}$$

電場 \vec{E} は(9-1-9)式と同様に下の式で表すことができる。ここでも、位相角 θ は位置 x と時刻 t によって変化する。

$$\vec{E} = |E_{0y}| \cos \theta \vec{e}_y + |E_{0z}| \cos(\theta + \delta) \vec{e}_z \quad (9-1-12)$$

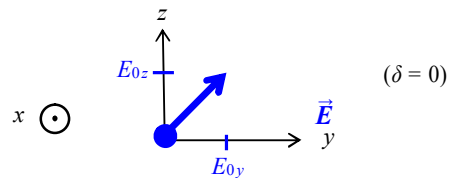
電場 \vec{E} の大きさ E は下の式を満たす楕円の円周上の位置を移動する⁶。

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \quad (9-1-13)$$

① 上の式で、位相差 $\delta = 0$ となる場合

「 $\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = 0$ 」となり、直線偏光

に相当する。

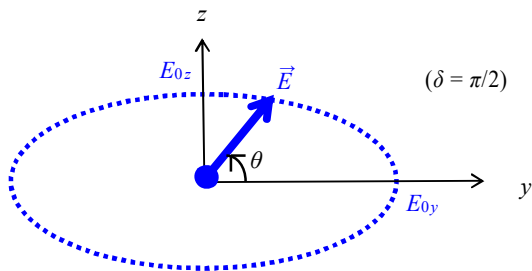


② 位相差 $\delta = -\pi/2$ となる場合

「 $\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = 1$ 」となり、 y 軸の径が E_{0y} 、

z 軸の径が E_{0z} の楕円となる。電場 \vec{E} の終点はこの楕円の円周上を時間経過とともに時計まわりに回転しながら $+x$ 方向に進む

($E_{0y} = E_{0z}$ の場合が円偏光に相当)。



③ 一般的な位相差 δ となる場合

適当な 1 次変換をして、新たな Y 軸と Z 軸に対し

「 $\left(\frac{E_Y}{E_{0Y}}\right)^2 + \left(\frac{E_Z}{E_{0Z}}\right)^2 = 1$ 」となるような楕円になる。

* 計算方法

(9-1-12)式に対し、行列 A を用いると下の式のように表すことができる。ここで、 $1/(E_{0y})^2 = a$ 、 $1/(E_{0z})^2 = b$ 、 $\cos\delta/(E_{0y}E_{0z}) = c$ 、 $\sin^2\delta = d^2$ とした。

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)\cos\delta = a E_y^2 + b E_z^2 - 2c E_y E_z$$

⁶ (9-1-11)式をこの式に代入すると、この式(楕円の円周を表す式)が成立することが確認できる。

$$= [E_y \ E_z] \begin{bmatrix} a & -c \\ -c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} = [E_y \ E_z] A \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} = d^2 \quad (9-1-14)$$

行列 A の固有値 λ は, λ_1 (or λ_2) $= (a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2})/2$ で, 行列 A を対角化する行列 P はこれらの固有ベクトルより, 回転行列となり, 回転角 ψ を用いて下の式で表すことができる.

$$P = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (9-1-15)$$

これを(9-1-14)式に代入すると下の式のように対角化することができる(行列 tP は行列 P の転置行列で行列 P の逆行列となる. あるいは回転角 ψ を $\psi \rightarrow -\psi$ へ変更して逆回転にする).

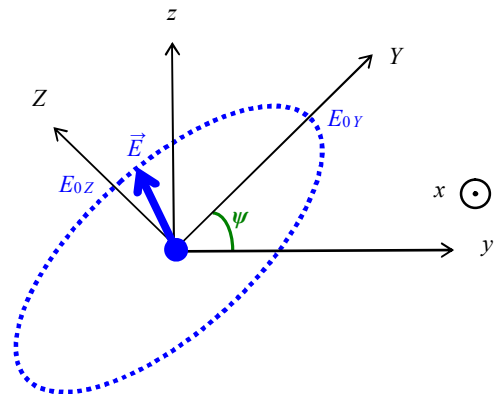
$$\begin{aligned} [E_y \ E_z] A \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} &= [E_y \ E_z] P ({}^tP A P) {}^tP \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} = [E_y \ E_z] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 E_y^2 + \lambda_2 E_z^2 = d^2 \end{aligned} \quad (9-1-16)$$

ここで, $\cos \psi = \frac{2c}{\sqrt{4c^2 + \{a-b - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}\}^2}}$, $\sin \psi = \frac{a-b - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{\sqrt{4c^2 + \{a-b - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}\}^2}}$ とした.

したがって, (9-1-16)式は新しい Y 軸と Z 軸を長径, または短径とする楕円を表す式となる.

$$\left(\frac{E_y}{d/\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{d/\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 = 1 \quad (9-1-17)$$

(9-1-17)式より, 電場 \vec{E} の(楕円の) Y 成分 $E_y/E_{0Y} = E_y/(d/\sqrt{\lambda_1})$, Z 成分 $E_z/E_{0Z} = E_z/(d/\sqrt{\lambda_2})$ とすると, 電場 \vec{E} が下の式で表される楕円の円周上を(電場の大きさが伸び縮みしながら)回転しながら $+x$ 方向に進む. 回転の向きは位相差 δ による ($-\pi < \delta < 0$ で反時計回り, $0 < \delta < \pi$ で時計回りに回転). 楕円偏光の状態が一般的な電磁波の偏光となる.



$$\left[\left(\frac{E_y}{E_{0Y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0Z}}\right)^2 = 1 \right]$$

・自然光

自然光は光が発生源の場所が異なっていたり, 発生時間が異なっていたりして, 様々の偏光した光が混在している光である.

9-2. 電磁波の反射と屈折

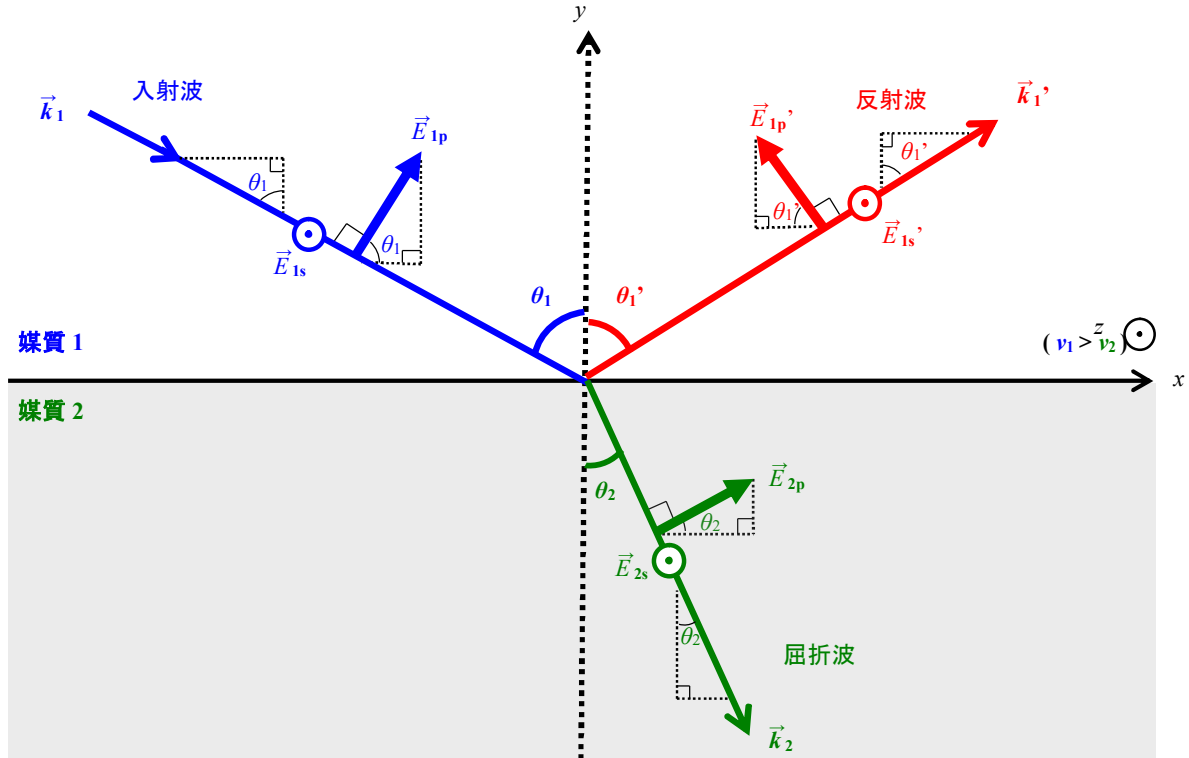
電磁波(光)が媒質 1 から媒質 2 に入射して, 反射波と屈折波(透過波)が生じる場合を考えてみよう. ここでは, 下の図のように, 境界は x 方向にあり, 斜めに入射するものとして, 入射波, 反射波, 屈折波は xy 平面上を進むものとする. 電磁波が媒質 1 において進む速さ v_1 , 媒質 2 での速さ v_2 とし, 電磁波の波長をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2$ とする(ここで, $\lambda_1 = \lambda_1'$ が成立する). 入射角 θ_1 , 反射角 θ_1' , 屈折角 θ_2 とし, 入射波の波数 \vec{k}_1 , 反射波の波数 \vec{k}_1' , 屈折波の波数 \vec{k}_2 とすると, これらの波数の大きさはそれぞれ $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, $k_1' = 2\pi/\lambda_1'$, $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ で, 電磁波は横波であり, それぞれの波数は下の式で表すことができる(下の図も参照のこと).

$$\vec{k}_1 = (k_{1x}, -k_{1y}, 0) = (k_1 \sin \theta_1, -k_1 \cos \theta_1, 0) \quad (9-2-1a)$$

$$\vec{k}_1' = (k_{1x}', k_{1y}', 0) = (k_1' \sin \theta_1', k_1' \cos \theta_1', 0) \quad (9-2-1b)$$

$$\vec{k}_2 = (k_{2x}, -k_{2y}, 0) = (k_2 \sin \theta_2, -k_2 \cos \theta_2, 0) \quad (9-2-1c)$$

電磁波(光)は横波で偏光しており, 2つの成分に分けて扱う. 図のように, xy 平面と垂直になる成分(z 方向を向く波)となる波を **s 波**⁷, xy 平面上にある成分となる波を **p 波**⁸と呼ぶ. s 波も p 波も電磁波の進行方向となる波数 \vec{k} に対して垂直となる(横波).



入射波の電場の s 波成分を \vec{E}_{1s} , p 波成分を \vec{E}_{1p} , 反射波の電場の s 波成分を \vec{E}_{1s}' , p 波成分を \vec{E}_{1p}' , 屈折波の電場の s 波成分を \vec{E}_{2s} , p 波成分を \vec{E}_{2p} とすると, 入射波の電場 \vec{E}_1 , 反射波の電場 \vec{E}_1' , 屈折波の電場 \vec{E}_2 は下の式で表すことができる(ここでは, s 波, p 波ともに初期位相角は 0 とした. 実際の電場はこの関数の実部とする).

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1s} + \vec{E}_{1p} \quad (9-2-2a)$$

$$\vec{E}_{1s} = (0, 0, E_{1s}) \exp(i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})) \quad (9-2-2b)$$

$$\vec{E}_{1p} = (E_{1p} \cos \theta_1, E_{1p} \sin \theta_1, 0) \exp(i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})) \quad (9-2-2c)$$

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_{1s}' + \vec{E}_{1p}' \quad (9-2-3a)$$

$$\vec{E}_{1s}' = (0, 0, E_{1s}') \exp(i(\omega_1' t - \vec{k}_1' \cdot \vec{r})) \quad (9-2-3b)$$

$$\vec{E}_{1p}' = (-E_{1p}' \cos \theta_1', E_{1p}' \sin \theta_1', 0) \exp(i(\omega_1' t - \vec{k}_1' \cdot \vec{r})) \quad (9-2-3c)$$

⁷ s 波はドイツ語で「senkrecht (垂直)」の略で, 電気工学では TE 波(Transverse Electric wave)に相当する.

⁸ p 波もドイツ語(英語)で「parallel(平行)」の略であり, xy 平面上を向いた波で電気工学では TM 波(Transverse Magnetic wave)に相当する.

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2s} + \vec{E}_{2p} \quad (9-2-4a)$$

$$\vec{E}_{2s} = (0, 0, E_{2s}) \exp(i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})) \quad (9-2-4b)$$

$$\vec{E}_{2p} = (E_{2p} \cos \theta_2, E_{2p} \sin \theta_2, 0) \exp(i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})) \quad (9-2-4c)$$

ここで、媒質 1 での(絶対)屈折率 $n_1 = c/v_1$ で、入射波の角速度 $\omega_1 = v_1 k_1 = c k_1/n_1$ 、反射波の角速度 $\omega_1' = v_1' k_1' = c k_1'/n_1'$ ($= \omega_1$ で同じ媒質 1 を進むので $v_1 = v_1'$, $k_1 = k_1'$)、媒質 2 での(絶対)屈折率 $n_2 = c/v_2$ で、屈折波の角速度 $\omega_2 = v_2 k_2 = c k_2/n_2 (= \omega_1)$ となる。

一方、磁場はマクスウェル方程式の 1 つである(8-2-12)式に平面波となる電磁波の電場 \vec{E} を代入すると、下の関係式を導出できる。

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \rightarrow \quad -i\omega \vec{B} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} E_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i (-i) k_j E_k = -i \vec{k} \times \vec{E} \quad \rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (\text{or} \quad \vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\mu \omega}) \quad (9-2-5)$$

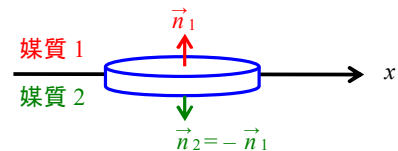
上の式より、磁場 \vec{H} は波数 \vec{k} と電場 \vec{E} に対して直交することが確認できる。

・境界条件

積分形で表した 4 つのマクスウェル方程式((3-4-9)式, (5-4-1)式, (7-1-4)式, (8-1-4)式。これら 4 つの式の微分形が(8-2-3)式, (8-2-5)式, (8-2-12)式, (8-2-15)式に相当する)に対し、境界条件を適用させる。ここで、2 つの媒質の境界では(真)電荷、電流はないとする。さらに、これらの境界条件では最終的に電場だけで表す。

① (3-4-9)式への適用

右の図のように、媒質の境界を挟むように微小体積をもつ円筒を考える。この円筒の媒質 1 側の法線ベクトル \vec{n}_1 、媒質 2 側の法線ベクトル \vec{n}_2 とする。媒質 1 側の電束密度 $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$ で、媒質 2 側の電束密度 $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$ となり、(8-2-3)式より、閉曲面内には電荷がないので下の式が成り立つ。



$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\rightarrow (\epsilon_1 \vec{E}_1 + \epsilon_1 \vec{E}_1' - \epsilon_2 \vec{E}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (9-2-6)$$

法線ベクトル $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$ なので、上の式に(9-2-2)式~(9-2-4)式を代入すると電場の y 成分のみが関係する。また、共通となる項「 $e^{i\omega_1 t} (= e^{i\omega_2 t})$ 」を両辺から消去すると(境界では位置の y 成分 = 0)下の式を得ることができる。

$$\epsilon_1 E_{1p} \sin \theta_1 e^{-i k_1 \sin \theta_1 x} + \epsilon_1 E_{1p}' \sin \theta_1' e^{-i k_1' \sin \theta_1' x} = \epsilon_2 E_{2p} \sin \theta_2 e^{-i k_2 \sin \theta_2 x} \quad (9-2-7)$$

境界上の任意の位置の x 成分で成立するためには下の式が成り立つ必要がある。

$$k_1 \sin \theta_1 = k_1' \sin \theta_1' = k_2 \sin \theta_2 \quad (9-2-8)$$

入射波と反射波では波数の大きさが等しい($k_1 = k_1' = 2\pi/\lambda_1$)で、上の式から入射角と反射角が等しくなる($\theta_1 = \theta_1'$ ←「**反射の法則**」)。さらに、上の式を変形すると下の式のような「**屈折の法則(スネルの法則)**」を表す式を得ることができる。

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (9-2-9)$$

(9-2-8)式を(9-2-7)式に代入すると下の関係式を得ることができる。

$$\varepsilon_1 E_{1p} \sin \theta_1 + \varepsilon_1 E_{1p}' \sin \theta_1' = \varepsilon_2 E_{2p} \sin \theta_2 \quad (9-2-10)$$

② (5-4-1)式への適用

(9-2-6)式と同様に、磁束密度 \vec{B} に対して下の式が境界上で成り立つ。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (9-2-11)$$

電磁波では、磁束密度 \vec{B} と電場 \vec{E} は(9-2-5)式で関係づけられるので、磁束密度 \vec{B} は電場の成分を用いて表すと下の式となる。ここで、電磁波は横波で波数の z 成分 $k_z = 0$ を用いた。

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} (k_y E_z, -k_x E_z, k_x E_y - k_y E_x) \quad (9-2-13)$$

上の式について、角速度 $\omega (= \nu k)$ と波数 \vec{k} の成分表示である(9-2-1)式を用いると、入射波の磁束密度 \vec{B}_1 、反射波の磁束密度 \vec{B}_1' 、屈折波の磁束密度 \vec{B}_2 は、電場を用いて下の式で表すことができる($\nu_1 = \nu_1'$)。

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\nu_1} (-E_{1s} \cos \theta_1, -E_{1s} \sin \theta_1, E_{1p}) \exp(i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})) \quad (9-2-14a)$$

$$\vec{B}_1' = \frac{1}{\nu_1'} (E_{1s}' \cos \theta_1', -E_{1s}' \sin \theta_1', E_{1p}') \exp(i(\omega_1' t - \vec{k}_1' \cdot \vec{r})) \quad (9-2-14b)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\nu_2} (-E_{2s} \cos \theta_2, -E_{2s} \sin \theta_2, E_{2p}) \exp(i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})) \quad (9-2-14c)$$

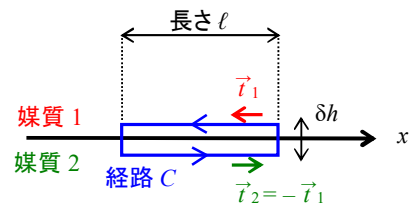
(9-2-7)式を得たの同様にして、(9-2-11)式に(9-2-14)式を代入し、 y 成分をとり、さらに位置 x は任意なので共通となる指数関数分を消去すると下の式を得ることができる。

$$\frac{1}{\nu_1} E_{1s} \sin \theta_1 + \frac{1}{\nu_1'} E_{1s}' \sin \theta_1' = \frac{1}{\nu_2} E_{2s} \sin \theta_2 \quad (9-2-15)$$

③ (7-1-4)式への適用

境界をはさんで右の図のような経路 C を考えよう。

経路 C の接線方向の単位ベクトル(接ベクトル) \vec{l} とし、媒質1での接ベクトル \vec{l}_1 、媒質1での接ベクトル \vec{l}_2 、経路 C の幅 δh なので経路内部の微小面積 $\delta S = \ell \delta h$ となる。幅 $\delta h \rightarrow 0$ にとると、下の(7-1-4)式の右辺は微小量となり、右辺に対して無視することができる。



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{経路 } C \text{ の内部}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_1 \cdot \vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{l}_2 = 0$$

$$\rightarrow (\vec{E}_1 + \vec{E}_1' - \vec{E}_2) \cdot \vec{r}_1 = 0 \quad (9-2-16)$$

接ベクトル $\vec{r}_1 = (-1, 0, 0)$ なので、入射波、反射波、屈折波の電場の x 成分を採用すると下の式を得ることができる。

$$E_{1p} \cos \theta_1 - E_{1p}' \cos \theta_1' = E_{2p} \cos \theta_2 \quad (9-2-17)$$

④ (8-1-4)式の適用

上の③で扱ったのと同様に、境界をはさんで経路 C を採用する。このとき、同様に(8-1-4)式の面積積分の項が無視でき、下の式で近似できる。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{経路 } C \text{ の内部}} (\vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{H}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{r}_2 = 0$$

$$\rightarrow (\vec{H}_1 + \vec{H}_1' - \vec{H}_2) \cdot \vec{r}_1 = 0 \quad (9-2-18)$$

磁場 \vec{H} は電場 \vec{E} を用いると、(9-2-5)式で表すことができるので、 x 成分を採用すると下の式を得ることができる。

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} E_{1s} \cos \theta_1 - \frac{1}{\mu_1' v_1'} E_{1s}' \cos \theta_1' = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{2s} \cos \theta_2 \quad (9-2-19)$$

⑤ まとめ

ここで、入射波の振幅 E_1 に対する反射波の振幅 E_1' と屈折波の振幅 E_2 を求めるために必要な関係式をまとめよう。

反射波は入射波と同じ媒質内を進むので下の式(「[反射の法則](#)」)が成り立つ(角速度 $\omega_1 = \omega_1' = \omega_2$)。

$$\theta_1 = \theta_1', \quad v_1 = v_1', \quad k_1 = k_1' \quad (9-2-20)$$

屈折波では「[屈折の法則\(スネルの法則\)](#)」が成り立つ。媒質 1 に対する媒質 2 の屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ は媒質 1 での速さ v_1 と媒質 2 での速さ v_2 の比で定義される($n_{1 \rightarrow 2} = v_1/v_2$)。また、媒質 1 での速さ v_1 は誘電率 ϵ_1 と透磁率 μ_1 を用いて、「 $v_1 = 1/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ 」と表される。

$$n_{1 \rightarrow 2} := v_1/v_2 = \sin \theta_1/\sin \theta_2 = \lambda_1/\lambda_2 = k_2/k_1 = n_2/n_1 \quad (9-2-21)$$

電場の振幅を用いて表した境界条件は、(9-2-10)式、(9-2-15)式、(9-2-17)式、(9-2-19)式である。これらの 4 つの式を再度表す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 E_{1p} \sin \theta_1 + \epsilon_1 E_{1p}' \sin \theta_1' = \epsilon_2 E_{2p} \sin \theta_2 \quad (\text{p 波の } y \text{ 成分}) \quad (9-2-22) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v_1} E_{1s} \sin \theta_1 + \frac{1}{v_1'} E_{1s}' \sin \theta_1' = \frac{1}{v_2} E_{2s} \sin \theta_2 \quad (\text{回転させた s 波の } y \text{ 成分}) \quad (9-2-23) \end{array} \right.$$

($\vec{B} = (\vec{k} \times \vec{E})/\omega \rightarrow$ 回転とは波数と電場の外積をとること)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1p} \cos \theta_1 - E_{1p}' \cos \theta_1' = E_{2p} \cos \theta_2 \quad (\text{p 波の } x \text{ 成分}) \quad (9-2-24) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu_1 v_1} E_{1s} \cos \theta_1 - \frac{1}{\mu_1' v_1'} E_{1s}' \cos \theta_1' = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{2s} \cos \theta_2 \quad (\text{回転させた s 波の } x \text{ 成分}) \quad (9-2-25) \end{array} \right.$$

(9-2-22)式と(9-2-24)式は p 波に関する式(s 波に関する振幅は含まれない)で、(9-2-23)式と(9-2-25)式は s 波に関する式(p 波に関する)

る振幅は含まれない)で、p波とs波の振幅の関係は独立で混合することはない。

・p波の反射係数と透過係数

① 反射係数

p波の反射係数 r_p を下のように定義して、「(9-2-22)式 $\times \cos \theta_2 - (9-2-24)$ 式 $\times \varepsilon_2 \sin \theta_2$ 」から透過波の振幅 E_{2p} を消去して計算する。反射係数 r_p が負となる場合、(9-2-2)式の上で描いた図において、反射波の電場の向きが図とは逆向きになる。

$$r_p := \frac{\text{反射波の振幅}}{\text{入射波の振幅}} = \frac{E_{1p}'}{E_{1p}} = \frac{\varepsilon_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \varepsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\varepsilon_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \varepsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2} \quad (9-2-26)$$

上の式に対して、屈折の法則や下の式で定義される(電磁)インピーダンス Z を用いると下の式で表すことができる。

* (電磁)インピーダンス Z
 インピーダンスは元々、電流 I に対する電圧 V の比で定義され、電場の大きさ E と磁場の大きさ H の比で表すことができる(電位と電場の関係とアンペールの法則を適用する、電場と磁場の関係は(9-2-5)式を使う)。

$$Z := \frac{V}{I} = \frac{E \times \text{長さ}}{H \times \text{長さ}} \rightarrow Z := \frac{E}{H} = \frac{\mu \omega}{k} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (9-2-27)$$

$$r_p = \frac{\varepsilon_2 v_2 \cos \theta_1 - \varepsilon_1 v_1 \cos \theta_2}{\varepsilon_2 v_2 \cos \theta_1 + \varepsilon_1 v_1 \cos \theta_2} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_1 - \mu_2 n_1 \cos \theta_2}{\mu_1 n_2 \cos \theta_1 + \mu_2 n_1 \cos \theta_2} \quad (9-2-28a)$$

$$= \frac{\mu_1 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1 - \mu_2 \cos \theta_2}{\mu_1 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1 + \mu_2 \cos \theta_2} = \frac{\mu_1 n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 - \mu_2 \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{\mu_1 n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \mu_2 \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-28b)$$

$$= \frac{\mu_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \mu_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\mu_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \mu_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2} \quad (9-2-28c)$$

なお、2つの媒質が磁性体でない場合は帯磁率 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ であるので、下の関係式が成り立つ。

$$r_p = \frac{n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1 - \cos \theta_2}{n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1 + \cos \theta_2} = \frac{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 - \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-29a)$$

$$= \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (9-2-29b)$$

② 透過係数

p波の透過係数 t_p を下のように定義して、「(9-2-22)式 $\times \cos \theta_1 + (9-2-24)$ 式 $\times \varepsilon_1 \sin \theta_1$ 」から反射波の振幅 E_{1p}' を消去して計算する。

$$t_p := \frac{\text{透過波の振幅}}{\text{入射波の振幅}} = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{2 \varepsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\varepsilon_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \varepsilon_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2} \quad (9-2-30)$$

(9-2-28)式と同様に、屈折の法則やインピーダンス Z を用いると下の式で表すことができる。

$$t_p = \frac{2 \varepsilon_1 v_1 \cos \theta_1}{\varepsilon_2 v_2 \cos \theta_1 + \varepsilon_1 v_1 \cos \theta_2} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_1 n_2 \cos \theta_1 + \mu_2 n_1 \cos \theta_2} \quad (9-2-31a)$$

$$= \frac{2 \mu_2 \cos \theta_1}{\mu_1 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1 + \mu_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \mu_2 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1}{\mu_1 n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \mu_2 \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-31b)$$

$$= \frac{2 \mu_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\mu_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \mu_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2} \quad (9-2-31c)$$

2つの媒質が磁性体でない場合は下の関係式が成り立つ。

$$t_p = \frac{2 \cos \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1 + \cos \theta_2} = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-32a)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (9-2-32b)$$

• s 波の反射係数と透過係数

① 反射係数

s 波の反射係数 r_s を下の式のように定義して、「(9-2-23)式 $\times \cos \theta_2 / \mu_2 - (9-2-25)式 \times \sin \theta_2$ 」から透過波の振幅 E_{2s} を消去して計算する。

$$r_s := \frac{\text{透過波の振幅}}{\text{入射波の振幅}} = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{\mu_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \mu_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\mu_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \mu_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2} \quad (9-2-33)$$

(9-2-28)式と同様に、屈折の法則やインピーダンス Z を用いると下の式で表すことができる。

$$r_s = \frac{\mu_2 v_2 \cos \theta_1 - \mu_1 v_1 \cos \theta_2}{\mu_2 v_2 \cos \theta_1 + \mu_1 v_1 \cos \theta_2} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 \cos \theta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2} \quad (9-2-34a)$$

$$= \frac{\mu_2 \cos \theta_1 - \mu_1 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_2}{\mu_2 \cos \theta_1 + \mu_1 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_2} = \frac{\mu_2 \cos \theta_1 - \mu_1 \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{\mu_2 \cos \theta_1 + \mu_1 \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-34b)$$

2つの媒質が磁性体でない場合は下の関係式が成り立つ。

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_2} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-35a)$$

$$= \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2} = - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (9-2-35b)$$

② 透過係数

s 波の透過係数 t_s を下の式のように定義して、「(9-2-23)式 $\times \cos \theta_1 / \mu_1 + (9-2-25)式 \times \sin \theta_1$ 」から反射波の振幅 E_{1p} を消去して計算する。

$$t_s := \frac{\text{透過波の振幅}}{\text{入射波の振幅}} = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2 \mu_2 v_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\mu_2 v_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \mu_1 v_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2} \quad (9-2-36)$$

(9-2-28)式と同様に、屈折の法則やインピーダンス Z を用いると下の式で表すことができる。

$$t_s = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} = \frac{2 \mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2} \quad (9-2-37a)$$

$$= \frac{2 \mu_2 \cos \theta_1}{\mu_2 \cos \theta_1 + \mu_1 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_2} = \frac{2 \mu_2 \cos \theta_1}{\mu_2 \cos \theta_1 + \mu_1 \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-37b)$$

2つの媒質が磁性体でない場合は下の関係式が成り立つ。

$$t_s = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (9-2-38a)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} \quad (9-2-38b)$$

・反射係数と透過係数のまとめ

磁性体でない媒質の場合の反射係数と透過係数をまとめる。これらの式を「フレンネル(Fresnel⁹)の公式」と呼ぶ。

$$r_p = \frac{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 - \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{\tan (\theta_1 - \theta_2)}{\tan (\theta_1 + \theta_2)} \quad (9-2-39a)$$

$$t_p = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2) \cos (\theta_1 - \theta_2)} \quad (9-2-39b)$$

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = - \frac{\sin (\theta_1 - \theta_2)}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} \quad (9-2-39c)$$

$$t_s = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} \quad (9-2-39d)$$

さらに、入射角と屈折角が0近傍($\theta_1 \sim 0, \theta_2 \sim 0$)にあるとすると、下の近似式が成り立つ。

$$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \quad (9-2-40a)$$

$$t_p = \frac{2 n_1}{n_2 + n_1} = \frac{2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \quad (9-2-40b)$$

$$r_s = - \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = - \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = - r_p \quad (9-2-40c)$$

$$t_s = \frac{2 n_1}{n_2 + n_1} = \frac{2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = t_p \quad (9-2-40d)$$

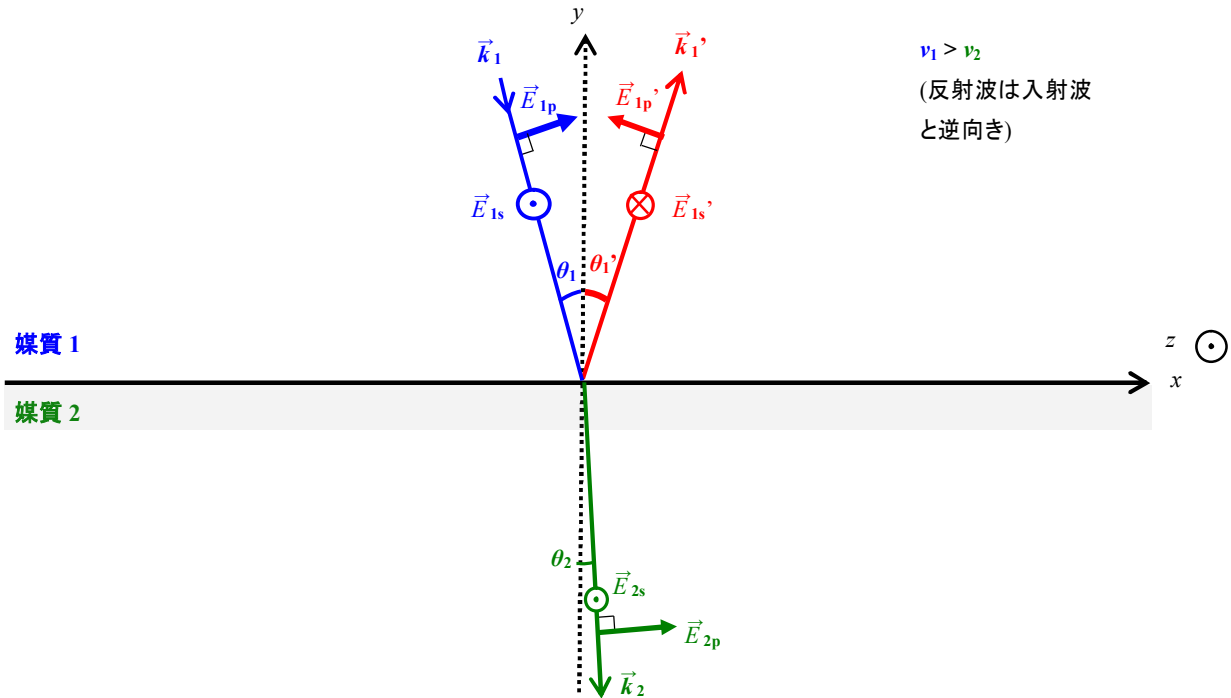
上の関係から、入射角が0近傍では、p波、またはs波の反射係数の符号が変わる。また、屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ を用いると、p波の反射係数 r_p と透過係数 t_p の関係は下の式で表すことができる。

$$r_p = \frac{n_{1 \rightarrow 2} - 1}{n_{1 \rightarrow 2} + 1} = \frac{1}{2} (n_{1 \rightarrow 2} - 1) t_p \quad (9-2-41)$$

⁹ フレンネル(Augutin J. Fresnel)は18世紀初頭のフランスの物理学者で光学に関する研究を行った。

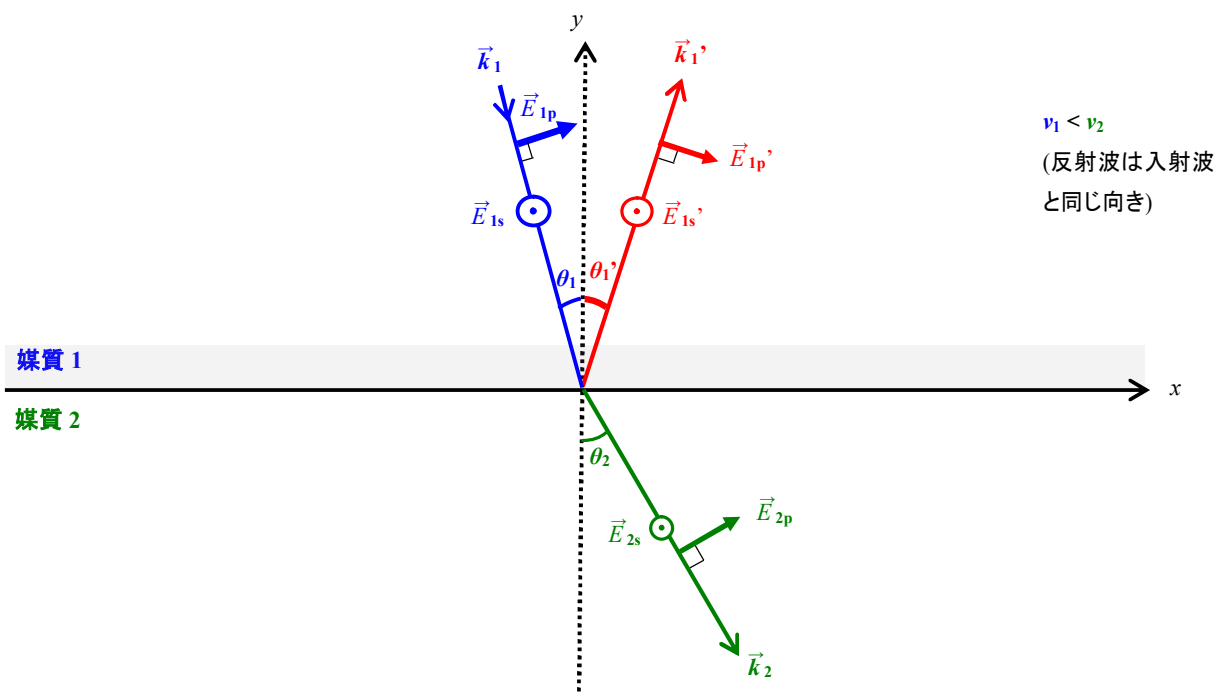
ここで、入射角と屈折角が0近傍($\theta_1 \sim 0, \theta_2 \sim 0$)での反射波と透過波について図示してみよう(反射係数が負となる場合は電場の向きを逆転させた)。なお、入射角 $\theta_1 = 0$ となる場合は、s波とp波の区別はつかない(共に境界面に対して平行になる)。

① $v_1 > v_2$ のとき ($\rightarrow \theta_1 > \theta_2$)



図より、反射波はs波、p波ともに入射波に対して電場の向きが逆転していることがわかる。s波の反射係数の符号は負となり(s波の反射係数の位相が π ずれた)、元の図と比べて逆向きに反射している。p波の反射係数は正で、電場の向きは元の図のまま(元の図では既にp波の反射波は入射波に比べ、電場が逆向きと定義してから計算した)となる。結局、反射波は入射波の電場と逆向き(反射波は入射波に対して逆位相で反射)となる。これは、一般の波の「固定端反射」に対応している。

② $v_1 < v_2$ のとき ($\rightarrow \theta_1 < \theta_2$)



上の図で、反射波は s 波、p 波ともに入射波に対して電場が同じ向きとなる。p 波の反射係数の符号は負となるが、元の図で定義した p 波の向きがあらかじめ逆向きとしたためである。したがって、反射波は入射波の電場は同じ向き(反射波は入射波に対して同位相で反射)となる。これは、一般の波の「自由端反射」に対応している。

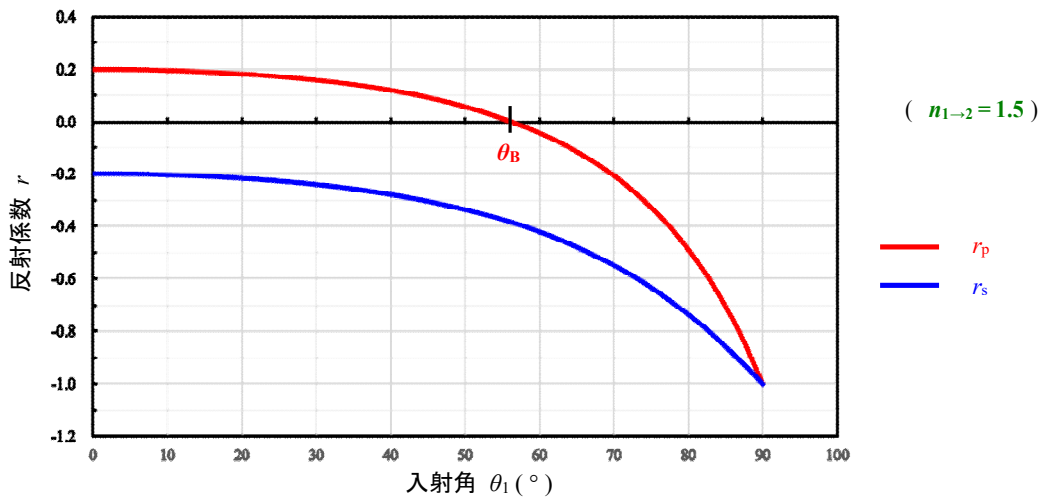
・ブリュースター(Brewster)角度

(9-2-39a)式で p 波の反射係数 r_p を示したが、分子が 0 (あるいは、分母が無限大)となることがある。このとき、p 波の反射波が存在しないことを意味する。このときの入射角 θ_1 を「ブリュースター角(Brewster angle) θ_B 」と呼ぶ。p 波の反射係数 $r_p = 0$ となる入射角 $\theta_1 (= \theta_B)$ は(9-2-39a)式の「分子 = 0」より、「 $\cos^2 \theta_B = 1/(n_{1 \rightarrow 2}^2 + 1)$ 」と変形でき、これより、「 $\cos \theta_B = 1/\sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 + 1}$ 、 $\sin \theta_B = n_{1 \rightarrow 2}/\sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 + 1}$ 」となるので、ブリュースター角 θ_B は逆三角関数(アーク タンジェント)を用いて求めることができる

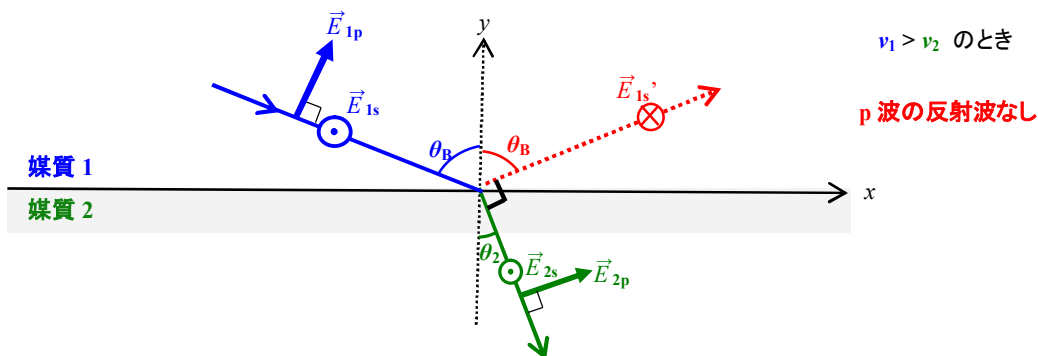
$$\theta_B = \arctan(n_{1 \rightarrow 2}) \quad (9-2-42)$$

あるいは、(9-2-39a)式の右辺の分母が無限大となるとき、「 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \infty \rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi/2 \rightarrow \theta_B + \theta_2 = \pi/2$ 」である。

例えば、媒質 1 を空気(真空)、媒質 2 をガラスとすると、それぞれの屈折率 $n_1 = 1, n_2 = 1.5$ となり($n_{1 \rightarrow 2} = 1.5$)、ブリュースター角 $\theta_B = \arctan(1.5) = 56.3^\circ$ である。下のグラフは横軸に入射角 θ_1 、縦軸に反射係数をとったグラフでブリュースター角 θ_B で p 波の反射係数 r_p が正から負となっている。s 波の反射係数 r_s は負のままである。入射角 $\theta_1 = 0^\circ$ で、 $r_p = 0.2, r_s = -0.2$ で、入射角 $\theta_1 = 90^\circ$ で、 $r_p = r_s = -1.0$ となる。

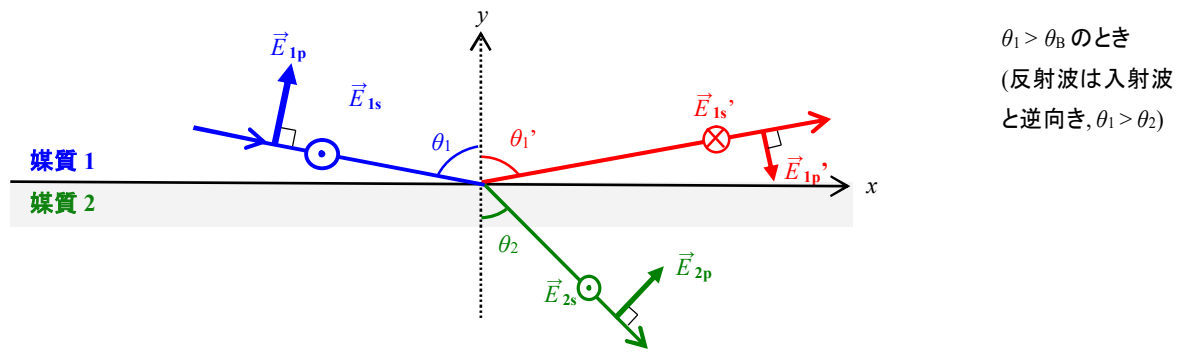


ブリュースター角 θ_B で入射したときの様子を図示すると下の図のようになる。 $\theta_1 + \theta_2 = \theta_B + \theta_2 = \theta_1' + \theta_2 = \pi/2$ となるので、反射波と透過波の間の角度も直角となる(ここでは、 $\theta_B (= \theta_1) > \theta_2$)。すなわち、入射角をブリュースター角にすると反射波は s 波のみになり、直線偏光となるような電磁波とすることができる。

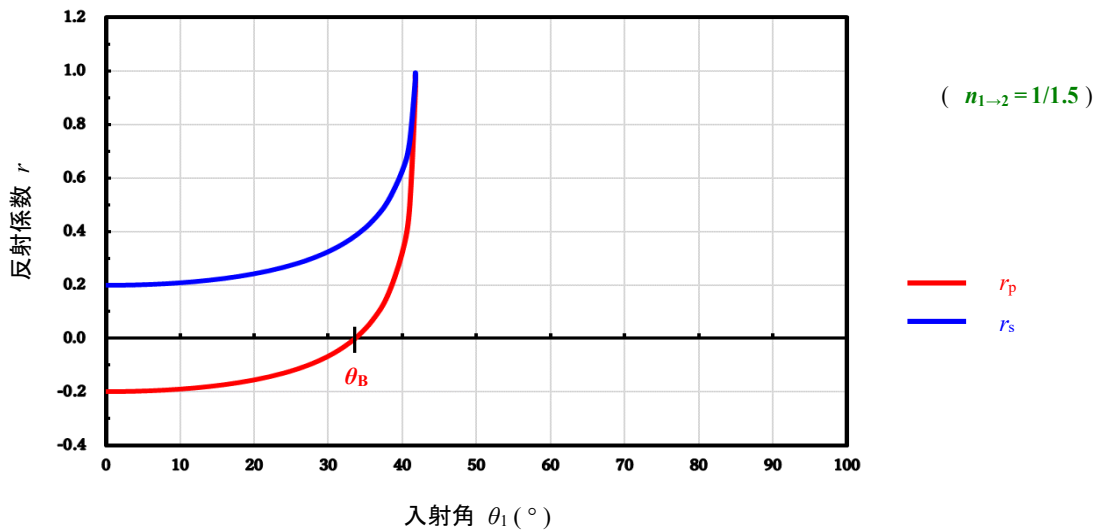


これは、p 波の透過波ができる、p 波の透過波が作る電場の向き \vec{E}_{2p} と、p 波の反射波が進む向き \vec{k}_1' は平行になり、反射波が横波

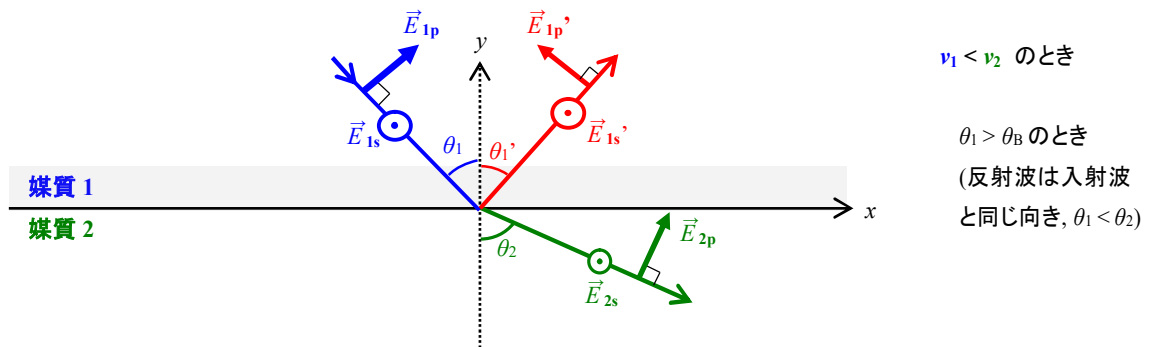
として存在できないことを意味する。さらに、入射角がブリュースター角 θ_B より大きくなると($\theta_1 > \theta_B$)図のような反射波の状態となり、この図からも、入射波と反射波の電場の向きが逆転し(位相が π ずれる)、固定端反射に相当する。



次に、媒質 1 をガラス、媒質 2 を空気(真空)としよう。屈折率 $n_{1 \rightarrow 2} = 1/1.5 = 0.667$ で、ブリュースター角 $\theta_B = \arctan(1/1.5) = 33.7^\circ$ である。下のグラフは横軸に入射角 θ_1 、縦軸に反射係数をとったグラフ¹⁰で今回は p 波の反射係数 r_p が負から正となっている。s 波の反射係数 r_s は正のままである。入射角 $\theta_1 = 0^\circ$ で、 $r_p = -0.2$, $r_s = 0.2$ で、入射角 $\theta_1 = 90^\circ$ で、 $r_p = r_s = 1.0$ となる。



ここでも同様に、入射角 θ_1 がブリュースター角 θ_B に一致する($\theta_1 = \theta_B$)と、「 $\theta_1 + \theta_2 = \theta_B + \theta_2 = \theta_1' + \theta_2 = \pi/2$ 」の関係が成立するが、屈折角 θ_2 はブリュースター角 θ_B より大きい($\theta_2 > \theta_B$)。さらに、入射角 θ_1 がブリュースター角 θ_B より大きくなると(ただし、臨界入射角 θ_c よりも小さいので、 $\theta_c > \theta_1 > \theta_B$)、下の図のような反射波の状態となり、この図からも、入射波と反射波の電場が同じ向きとなり(同位相で反射)、自由端反射に相当する。



¹⁰ ある角度(臨界入射角) θ_c を越えて入射した場合は、全反射(後で述べる)という現象が起きる。ここでは、入射角は臨界入射角よりも小さいとする。

・ストークス(Stokes)の定理

媒質 2 から媒質 1 へ入射する電磁波の反射係数と透過係数を各々、「 $r \rightarrow \tilde{r}$, $t \rightarrow \tilde{t}$ 」と表すと下の関係式が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_p = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} = -r_p \quad (9-2-43a) \\ \tilde{t}_p = \frac{2 Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \quad (9-2-43b) \\ \tilde{r}_s = \frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} = -r_s \quad (9-2-43c) \\ \tilde{t}_s = \frac{2 Z_1 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} \quad (9-2-43d) \end{array} \right.$$

これらの関係式から、p 波と s 波については、下の関係が成り立つ。この式を「ストークス(Stokes)の定理¹¹⁾」と呼ぶ。

$$\left\{ \begin{array}{l} r_p^2 + t_p \tilde{t}_p = 1 \quad (9-2-44a) \\ r_s^2 + t_s \tilde{t}_s = 1 \quad (9-2-44b) \end{array} \right.$$

さらに、下の関係式も成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Z_2}{Z_1} t_p - r_p = 1 \quad (9-2-45a) \\ t_s - r_s = 1 \quad (9-2-45b) \end{array} \right.$$

・ポインティングベクトルと電磁エネルギーの保存

ポインティングベクトル \vec{S} は、「単位面積を通過する単位時間当たりの電磁エネルギーの流量」であり、電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} の外積として表される。電磁波の電場 \vec{E} を、「 $\vec{E}(\vec{r}, t) = |\vec{E}| \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ 」と表すと、ポインティングベクトル \vec{S} は下の式で表すことができる(ここで、磁場 \vec{H} は(9-2-5)式を用いた)。

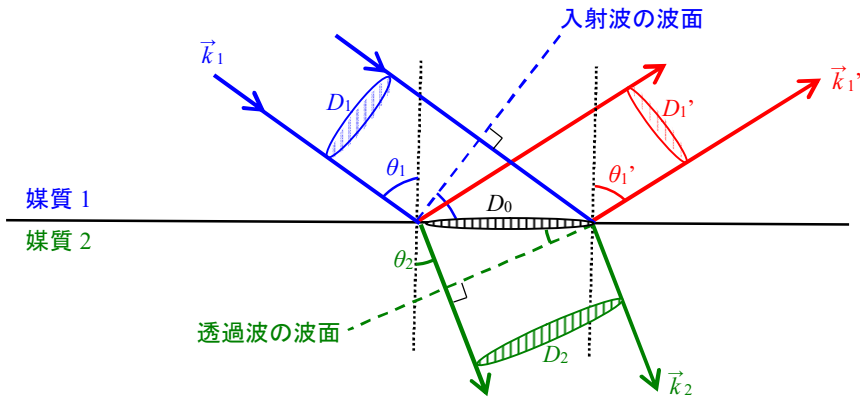
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{k}}{\mu \omega} |\vec{E}|^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (9-2-46)$$

電磁波の周期 T を用いて、ポインティングベクトルに対して時間平均をとると下の式を得ることができる。

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \frac{1}{2} \frac{\vec{k}}{\mu \omega} |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu v} |\vec{E}|^2 \vec{e} \quad (9-2-47)$$

ここで、電磁波が進む単位ベクトル $\vec{e} = \vec{k}/k$ とし、角速度 $\omega = vk$ を用いた。さらに、下の図のように、境界に沿った平面上の断面積を D_0 、および、入射波の進む向きと直交する断面積を D_1 、反射波の進む向きと直交する断面積を D_1' 、透過波の進む向きと直交する断面積を D_2 とした。

¹¹⁾ 「ストークスの定理」と呼ばれる定理は、一般には数学(ベクトル解析)に関する定理で、線積分を面積分に変換する公式を指す(rot (ローテーション)に関する公式)。 → 「6-5. 微分を用いたアンペールの法則(ストークスの定理)」で示した。



上の図より、境界面での断面積 D_0 を用いると、各々の断面積は「 $D_1 = D_1' = D_0 \cos \theta_1, D_2 = D_0 \cos \theta_2$ 」となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{入射波の単位時間当たりのエネルギーの流れ} = \langle S_1 \rangle D_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1 v_1} |\vec{E}_1|^2 D_0 \cos \theta_1 \quad (9-2-48a) \\ \text{反射波の単位時間当たりのエネルギーの流れ} = \langle S_1' \rangle D_1' = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_1 v_1} |\vec{E}_1'|^2 D_0 \cos \theta_1 \quad (9-2-48b) \\ \text{透過波の単位時間当たりのエネルギーの流れ} = \langle S_2 \rangle D_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_2 v_2} |\vec{E}_2|^2 D_0 \cos \theta_2 \quad (9-2-48c) \end{array} \right.$$

下の式で表されるように、単位時間当たりのエネルギーの流れは保存則を満たす。

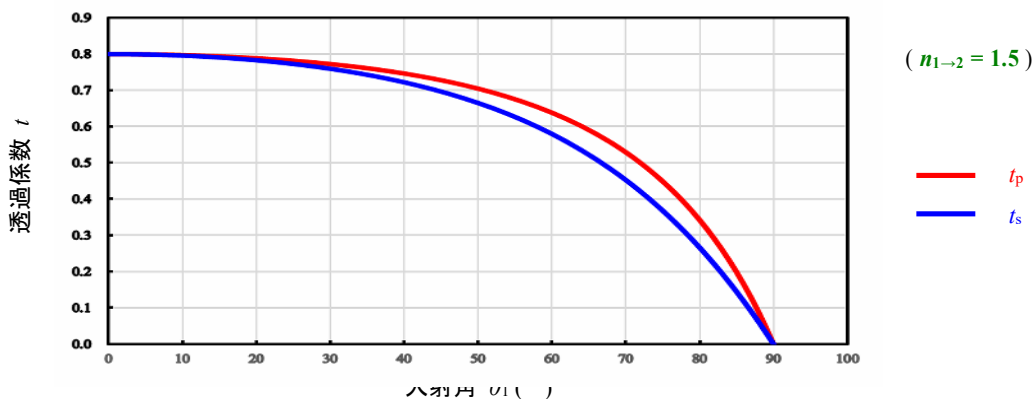
$$\langle S_1 \rangle D_1 = \langle S_1' \rangle D_1' + \langle S_2 \rangle D_2 \quad (9-2-49)$$

上の式から、反射係数 r と透過係数 t を用いると下の保存則の関係式が成り立つ。ここで、 $\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ を用いた。

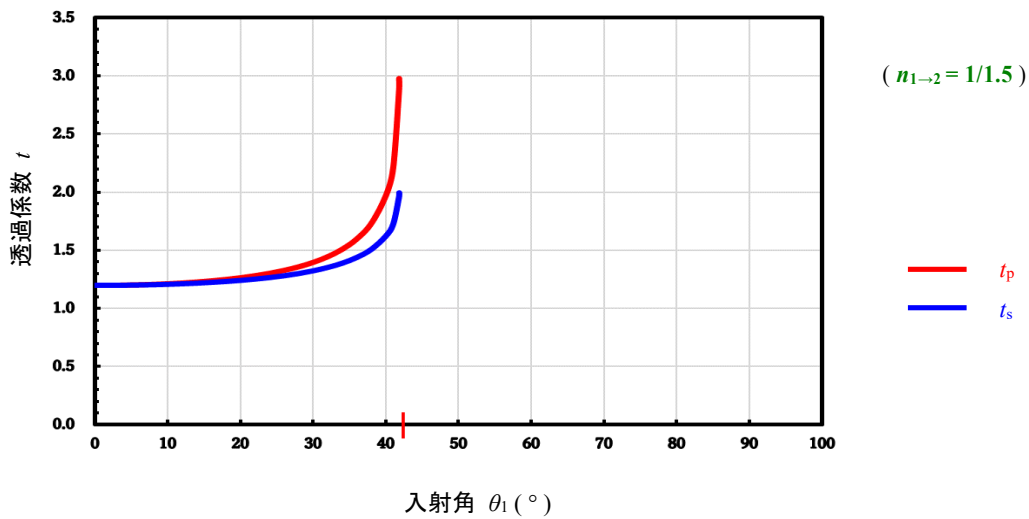
$$1 = r_p^2 + \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1} t_p^2 = r_s^2 + \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1} t_s^2 \quad (9-2-50)$$

・透過係数のグラフ

ここで、入射角 θ_1 に対する透過係数 t のグラフを示す。始めに、媒質 1 を空気(真空)、媒質 2 をガラスとし、p 波の透過係数 t_p と s 波の透過係数 t_s を下のグラフに示す。



次に、媒質 1 をガラス、媒質 2 を空気(真空)とし、p 波の透過係数 t_p と s 波の透過係数 t_s を下のグラフに示す。このグラフでは入射角 θ_1 が次に示す **臨界入射角 θ_c** より大きくなる場合は示さない。



・臨界入射角と全反射

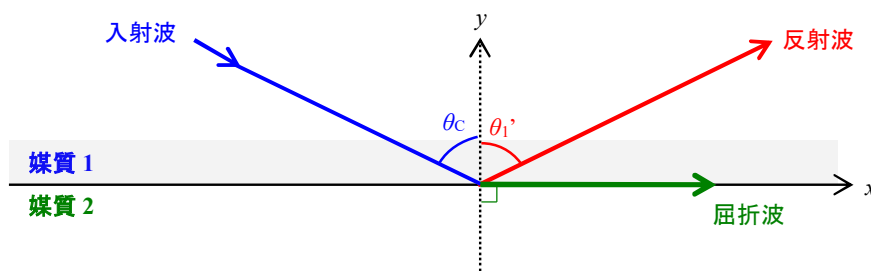
まず、(9-2-9)式で示した屈折の法則(スネルの法則)を再掲しよう。

$$n_{1 \rightarrow 2} := \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9-2-9)$$

ここで、媒質 1 での速さ v_1 が媒質 2 での速さ v_2 より小さくなる場合 ($v_1 < v_2 \rightarrow n_{1 \rightarrow 2} < 1$) を考えよう。これは、例えば、光がガラスから空気(真空)に入射する場合に相当する。このとき、入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 の関係はスネルの法則より、「 $\theta_1 < \theta_2$ 」が成り立つので、屈折角 θ_2 は最大で 90° となる。このときの入射角 θ_1 を **臨界入射角 θ_c** と呼び、下の式で表すことができる。

$$n_{1 \rightarrow 2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_c}{\sin 90^\circ} = \sin \theta_c \quad \rightarrow \quad \theta_c = \arcsin(n_{1 \rightarrow 2}) \quad (9-2-51)$$

例えば、媒質 1 をガラス、媒質 2 を空気(真空)とすると、臨界入射角 θ_c は、「 $\theta_c = \arcsin(1/1.5) = 41.8^\circ$ 」となる。入射角が臨界入射角 θ_c より大きくなると、反射波のみで、媒質 2 の内部まで到達する透過波ができない現象が生じる。このような現象を「**全反射**」と呼ぶ。入射角が臨界入射角 θ_c 場合を下図に示す。屈折波は境界面に沿って伝わる。



このときの透過波の電場 \vec{E}_2 は下の式で表される。媒質 2 の $-y$ 方向へ侵入することはない ($k_2 = k_1 \sin \theta_c$)。

$$\vec{E}_2 = (0, E_{2p}, E_{2s}) \exp(i(\omega_2 t - k_2 x)) \quad (9-2-52)$$

また, (9-2-49)式より, 媒質 2 での断面積 $D_2 = 0$ となるので, 透過波による電磁エネルギーの流れはない. 全て反射波に流れる.

$$\langle S_1 \rangle D_1 = \langle S_1' \rangle D_1 + \langle S_2 \rangle D_2 \quad \rightarrow \quad |\vec{E}_1|^2 = |\vec{E}_1'|^2 (= |t \vec{E}_1|^2) \quad (9-2-53)$$

次に, 全反射が起こる場合($\theta_1 > \theta_c$), スネルの法則を満たす(実数となる)屈折角 θ_2 は存在しないが, 屈折角を複素数とみなし, 形式的にスネルの法則を満たすことにしよう.

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{n_{1 \rightarrow 2}} \sin \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_c} = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > 1 \quad (9-2-54)$$

この関係式より, $\cos \theta_2$ を虚数とすると下の式を満たす(正か負は他の物理的条件を満たすようにとる).

$$\cos \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2}} = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2} - 1} \quad (9-2-55)$$

(9-2-4c)式で表された透過波の指数関数部分 $\exp(i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}))$ に(9-2-1c)式で表された波数 \vec{k}_2 を代入し, さらにスネルの法則 ($k_2 = k_1 n_{1 \rightarrow 2} = k_1 \sin \theta_1 / \sin \theta_2$)と(9-2-55)式を用いると下の式のように表すことができる.

$$\exp(i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})) = \exp(i \omega_2 t - i k_2 (\sin \theta_2 x - \cos \theta_2 y))$$

$$= \exp(i \omega_2 t) \exp(-i k_1 (\sin \theta_1 x \mp i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2} y))$$

媒質 2 で境界より無限遠方($y \rightarrow -\infty$)には透過波は到達しないので, 上の式で符号 \mp のうち $+$ のみを採用すると透過波の指数関数部分は下の式で表すのが自然である(位置の y 成分は負となる).

$$\begin{aligned} & \exp(i \omega_2 t) \exp(-i k_1 \sin \theta_1 x + k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2} y) \\ & = \exp(i \omega_2 t) \exp(-i k_1 \sin \theta_1 x - k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2} |y|) \end{aligned} \quad (9-2-56)$$

臨界入射角 θ_c を越える入射角 θ_1 で入射した電磁波の屈折波は境界に沿って進む. このように進む光をエヴァネッセント光 (Evanescent light ¹²), あるいは近接場光と呼ぶ. エヴァネッセント波の侵入深さ y_{ev} とすると, 上の式から, 下の式で定義される.

$$y_{ev} = 1 / (k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}) = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_c}} \quad (9-2-57)$$

入射角 θ_1 が臨界入射角 θ_c より少し大きい場合($\theta_1 = \theta_c + \Delta\theta$)は, 「 $\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_c \sim \sin(2\theta_c) \Delta\theta$ 」を用いて, 下の式のように近似できる.

$$y_{ev} \sim \frac{\lambda_1}{2\pi n_{1 \rightarrow 2}} \sqrt{\frac{\tan \theta_c}{2 \Delta\theta}} \quad (9-2-58)$$

¹² 「エヴァネッセント(Evanescent)」とは, 「消え去る, 消えやすい, つかの間の, はかない, かすかな」などを意味する. エヴァネッセント光は, 直接観察することは難しいが, 近年, 測定に使う光源としてエヴァネッセント光を利用し始めている.

例えば、媒質 1 をガラス、媒質 2 を空気(真空)とし(臨界入射角 $\theta_C = 41.8^\circ$)、入射角 $\theta_1 = 42.8^\circ (\Delta\theta = 1^\circ = 0.0175 \text{ rad})$ とすると、侵入深さ $y_{ev} \sim 1.21 \lambda_1$ で入射波の波長 λ_1 と同程度になる(さらに、入射角を大きくすると、侵入深さは小さくなる。たとえば、入射角 $\theta_1 = 42.8^\circ$ とすると、侵入深さ $y_{ev} \sim 0.21 \lambda_1$)。 (9-2-57)式で表されたエヴァネッセント波の侵入深さ y_{ev} を用いると、(9-2-56)式は下の式のように表すことができる。

$$\exp(i \omega_2 t) \exp(-i k_1 \sin \theta_1 x - |y|/y_{ev}) \quad (9-2-59)$$

(9-2-4)式より屈折波としてのエヴァネッセント光の電場 \vec{E}_{ev} は透過係数 t を用いて下の式で表すことができる。

$$\vec{E}_{ev} = (E_{1p} t_p \cos \theta_2, E_{1p} t_p \sin \theta_2, E_{1s} t_s) \exp(i \omega_2 t) \exp(-i k_1 \sin \theta_1 x - |y|/y_{ev}) \quad (9-2-60)$$

(9-2-39)式から、**全反射**での(磁性体でない媒質における)反射係数 r と透過係数 t を複素数表示で表すと下の式で表すことができる((9-2-55)式で \pm のうち $-$ を採用する)。

$$r_p = \frac{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 - \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} = |r_p| e^{i \varphi_p} \quad (9-2-61a)$$

$$t_p = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} = |t_p| e^{i \psi_p} \quad (9-2-61b)$$

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{\cos \theta_1 + i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{\cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} = |r_s| e^{i \varphi_s} \quad (9-2-61c)$$

$$t_s = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 - i \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} = |t_s| e^{i \psi_s} \quad (9-2-61d)$$

* 位相角 φ と ψ の計算

反射係数 r を表す(9-2-61a)式と(9-2-61c)式は「 $\frac{a+ib}{a-ib}$ ($= \frac{a^2-b^2+2iab}{a^2+b^2}$)」と表されている。この式を、振幅 $|A|$ と位相角 B を用いて表すと「 $|A| e^{iB}$ 」と表すしよう。

$$|A|^2 = \frac{|a+ib|^2}{|a-ib|^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad |A| = 1$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{\sin B} = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{2ab} = \frac{b}{a}$$

透過係数 t を表す(9-2-61b)式と(9-2-61d)式は「 $\frac{c}{a-ib}$ ($= \frac{ac+ibc}{a^2+b^2}$)」と表されている。この式を、振幅 $|C|$ と位相角 D を用いて表すと「 $|C| e^{iD}$ 」と表すしよう。

$$|C|^2 = \frac{c^2}{|a-ib|^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2} \quad \rightarrow \quad |C| = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan D = \frac{b}{a}$$

上の式から、**全反射する場合**の反射係数の大きさ $|r|$ とその位相角 φ は下の式で与えられる。

$$|r_p| = |r_s| = 1 \quad (9-2-62a)$$

$$\varphi_p = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1} \right) \quad (9-2-62b)$$

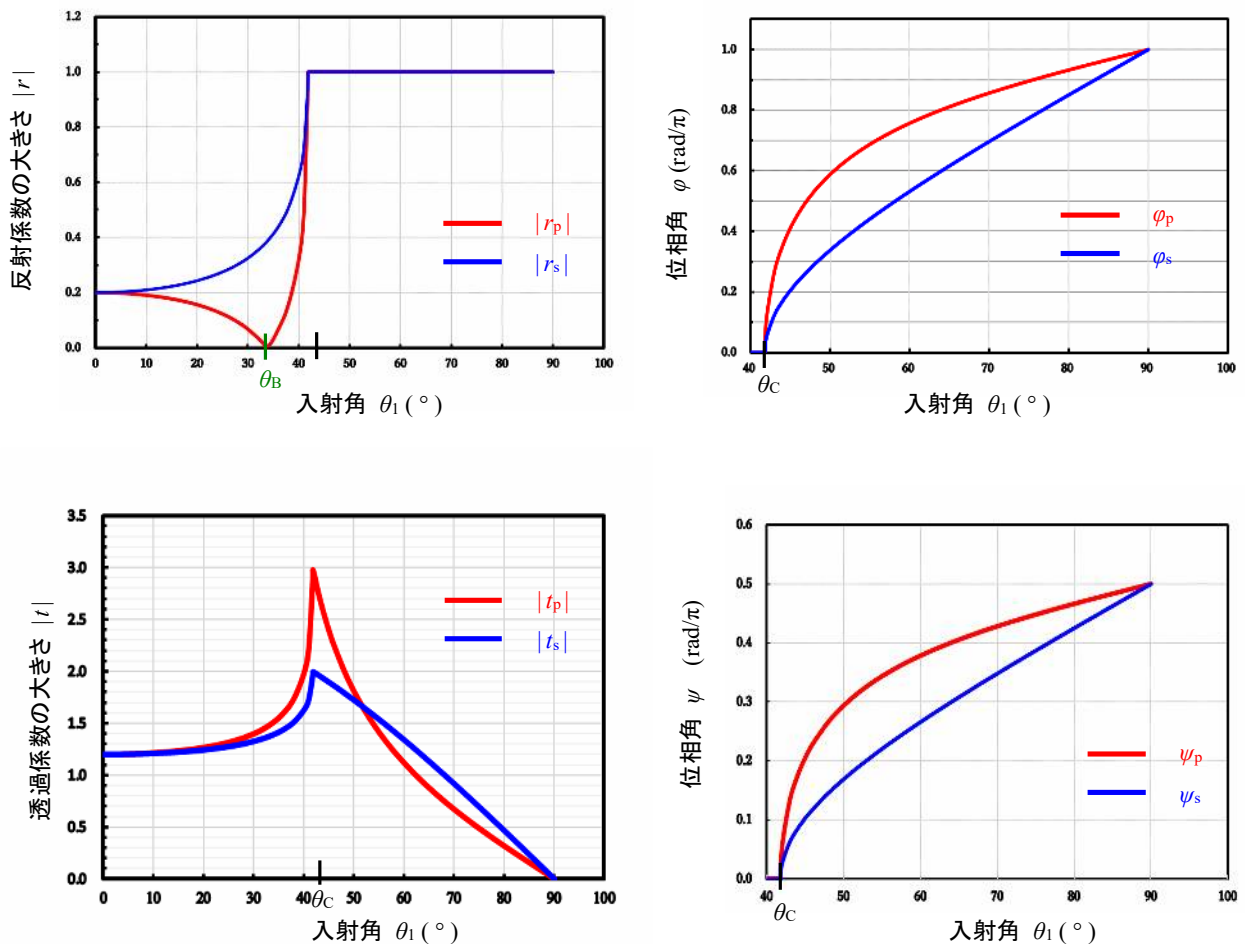
$$\varphi_s = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{\cos \theta_1} \right) \quad (9-2-62c)$$

さらに、**全反射する場合**の透過係数の大きさ $|t|$ とその位相角 ψ は下の式で与えられる¹³。

$$|t_p| = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2} \cos \theta_1}{\sqrt{n_{1 \rightarrow 2}^4 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}, \quad \psi_p = \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1} \right) \quad (9-2-63a)$$

$$|t_s| = \frac{2 \cos \theta_1}{\sqrt{1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}, \quad \psi_s = \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{\cos \theta_1} \right) \quad (9-2-63b)$$

媒質 1 をガラス、媒質 2 を空気(真空)とした場合、入射角 θ_1 に対する反射係数・透過係数の大きさ、反射係数・透過係数の位相角(位相角のグラフは入射角 $\theta_1 > 40^\circ$ を示す)のグラフを下に示す。



全反射している状態でのエヴァネッセント光の電場 \vec{E}_{ev} は(9-2-60)式に、(9-2-54)式と(9-2-55)式を代入することで得られる。

¹³ (9-2-62)式と(9-2-63)式で与えられた位相 φ と ψ は進行波としての電磁波を $\cos(\omega t - kx)$ (指数関数表示では $e^{i(\omega t - kx)}$)と表示しているため、 $\cos(kx - \omega t)$ (指数関数表示では $e^{i(kx - \omega t)}$)と表示した場合は負の符号がつく。このとき、(9-2-55)式の \pm のうちで $+$ を採用する。

$$\vec{E}_{ev} = (-i E_{1p} |t_p| e^{i\psi_p} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}^2} - 1}, E_{1p} |t_p| e^{i\psi_p} \frac{\sin \theta_1}{n_{1 \rightarrow 2}}, E_{1s} |t_s| e^{i\psi_s})$$

$$\times \exp(i \omega_2 t - i k_1 \sin \theta_1 x - |y|/y_{ev}) \quad (9-2-64)$$

エヴァネッセント光は、媒質 2 に侵入深さ y_{ev} (入射波の波長 λ_1 程度) だけ侵入し、境界面に沿って(+x 方向)進む。

・グース-ヘンシエンシフト(Goos-Hänchen¹⁴ shift)

全反射の状態では、入射波として異なる入射角 θ_1 を持つ合成波として入射する場合、反射波がどうなるのかを考えてみよう。入射波の電場 \vec{E}_1 と反射波の電場 \vec{E}_1' のうちの適当な成分をとり、入射角 θ_1 を持つ入射波と反射波を下の式で表す。ここで、p 波と s 波を同時に扱う。また、反射係数の大きさ $|r|=1$ とし、反射波の位相変化 φ を用いた。

$$E_1(x, y, t) = E_1 \exp(i(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x + k_1 \cos \theta_1 y)) = E_1 \exp(i(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x + k_1 \cos \theta_1 y))$$

$$E_1'(x, y, t) = E_1' \exp(i(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x - k_1 \cos \theta_1 y)) = E_1 \exp(i(\omega_1 t + \varphi(\theta_1) - k_1 \sin \theta_1 x - k_1 \cos \theta_1 y))$$

上の式で表した入射波と反射波のうち、境界上($y = 0$)で時間の関数による部分を省略して下の式のように表すとする。

$$E_1(x) = E_1 \exp(-i k_1 \sin \theta_1 x) \quad (9-2-65a)$$

$$E_1'(x) = E_1 \exp(i(\varphi(\theta_1) - k_1 \sin \theta_1 x)) \quad (9-2-65b)$$

様々な入射角 θ_1 を持った波が反射し、合成波としての反射波を扱いたいので、入射波の分布関数を $g(\theta_1)$ (この分布関数に入射波の振幅 E_1 も含むものとする)として、合成波としての入射波 $f_1(x)$ 、反射波を $f_1'(x)$ として、下の式で表すことができる。

$$f_1(x) = \int g(\theta_1) \exp(-i k_1 \sin \theta_1 x) d\theta_1 \quad (9-2-66a)$$

$$f_1'(x) = \int g(\theta_1) \exp(i(\varphi(\theta_1) - k_1 \sin \theta_1 x)) d\theta_1 \quad (9-2-66b)$$

あるいは、新たな変数 β を導入し($\beta := k_1 \sin \theta_1$)、この変数 β に対する新たな分布関数 $F_1(\beta)$ とすると、上の式は下の式として表すことができる。

$$f_1(x) = \int F_1(\beta) \exp(-i \beta x) d\beta \quad (9-2-67a)$$

$$f_1'(x) = \int F_1(\beta) \exp(i(\varphi(\beta) - \beta x)) d\beta \quad (9-2-67b)$$

入射波として入射臨界角 θ_c より大きく入射角 θ_0 近傍 ($\beta \rightarrow \beta_0 = k_1 \sin \theta_0$) の入射波の合成によるとすると、(9-2-67b)式の位相角 $\varphi(\beta)$ の部分は下の式のように近似できる。

¹⁴ グース(Hermann Fritz G. Goos)は 20 世紀前半、ドイツの物理学者で、ヘンシエン(Hilda Hänchen)は 20 世紀の物理学者で二人は師弟関係にあった。

$$\varphi(\beta) \sim \varphi(\beta_0) + \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} (\beta - \beta_0) \quad (9-2-68)$$

(9-2-68)式を(9-2-67b)式に代入すると下の式のように変形できる.

$$f_1'(x) \sim \exp(i(\varphi(\beta_0) - \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} \beta_0)) \times \int F_1(\beta) \exp(-i\beta(x - \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0})) d\beta$$

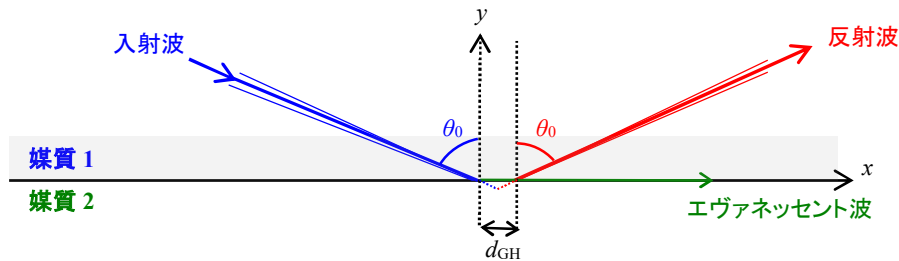
上の式で被積分関数は(9-2-67a)式の入射波の関数において, 位置 $x \rightarrow x - d\varphi/d\beta|_{\beta=\beta_0}$ に変更した式となっている.

$$f_1'(x) \sim \exp(i(\varphi(\beta_0) - \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} \beta_0)) \times f_1(x - \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0}) \quad (9-2-69)$$

上の式は入射波が境界にぶつかる位置 x に対して, 反射波はその位置より+側に, 「 $d\varphi/d\beta|_{\beta=\beta_0}$ 」だけずれた地点から反射していることになる. このずれ d_{GH} を **グース-ヘンシェンシフト** と呼ぶ. 反射波の位相が入射角に依存するため, 様々な入射角を持つ入射波が入射すると, 合成波としての反射波が干渉効果を起こし, 反射地点が入射地点から横にずれたように見える現象である.

$$d_{GH} = \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} \quad (9-2-70)$$

この様子を下に図に示す. 入射波が境界に入射した場所から, +x 方向にずれた地点から反射波が生じている.



グース-ヘンシェンシフト d_{GH} は下の式のように求めることができる. ここで, 「 $db_0/d\theta_1 = k_1 \cos \theta_0$ 」とする.

$$d_{GH} = \left. \frac{d\varphi}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} = \frac{d\varphi}{d\theta_1} \left. \frac{d\theta_1}{d\beta_0} \right|_{\theta_1=\theta_0} \quad (9-2-71)$$

* (9-2-62)式からの計算

「 $\varphi = 2 \arctan x$ 」と置く. p 波なら「 $x = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{n_{1 \rightarrow 2}^2 \cos \theta_1}$ 」, s 波なら「 $x = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}}{\cos \theta_1}$ 」とする.

$\rightarrow \frac{d\varphi}{d\theta_1} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{d\theta_1} = \frac{2}{1+x^2} \frac{dx}{d\theta_1}$

上の計算から p 波のグース-ヘンシェンシフト $d_{GH,p}$ と s 波のグース-ヘンシェンシフト $d_{GH,s}$ は下の式のように求めることができる. ここで入射角を再び, θ_0 から θ_1 に戻した.

$$d_{GH,p} = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2}^2}{(n_{1 \rightarrow 2}^2 + 1) \sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} \frac{\tan \theta_1}{k_1} = \frac{2 n_{1 \rightarrow 2}^2 \tan \theta_1}{(n_{1 \rightarrow 2}^2 + 1) \sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2} y_{ev} \quad (9-2-72a)$$

$$d_{GH,s} = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_{1 \rightarrow 2}^2}} \frac{\tan \theta_1}{k_1} = 2 \tan \theta_1 y_{ev} \quad (9-2-72b)$$

媒質 1 をガラス, 媒質 2 を空気(真空)とした場合, 入射角 θ_1 に対するエヴァネッセント波の侵入深さ y_{ev} とグース-ヘンシェンシフト $d_{GH,p}$ と $d_{GH,s}$ を下のグラフに示す(グース-ヘンシェンシフト $d_{GH,p}$ と $d_{GH,s}$ では, 長さの単位をエヴァネッセント波の侵入深さ y_{ev} とした).

