電気電子工学科３年　電気磁気学　後期期末試験　　1/2

（石井 良博担当）

/100

February 10, 2009　　No.____　氏名________________

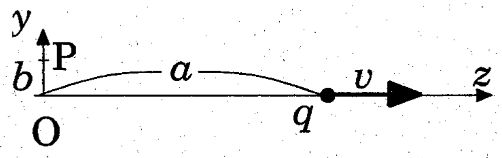
注意１．　単位を明記すること．

注意２．　結果に至るまでの過程を明記すること．

真空の誘電率　$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [F/m]

真空の透磁率　$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]

１．図に示すように，q [C]の電荷を有する粒子が z 軸に沿って速度 v [m/s]で運動している．z 軸上の O 点から粒子の距離が a [m]のときについて，次の問に答えよ．（各５点）



（１）O 点における電束密度を計算せよ．ただし，電束密度の方向が z の増加する方向にあるときを＋とせよ．

答　$D = -\dfrac{q}{4\pi a^2}$ [C/m²]

（２）O 点における変位電流密度を計算し，$J = \dfrac{qv}{2\pi a^3}$ [A/m²]となることを示せ．

$$J = \frac{dD}{dt} = \frac{q}{2\pi a^3}\frac{da}{dt}$$

$$= \frac{q}{2\pi a^3} v \quad [\mathrm{A/m^2}]$$

（３）$q = 3\times10^{-6}$ C の粒子が $a = 1$ m の位置にあるとき，O 点から y 軸方向へ $b = 1$ cm 離れた位置の磁界が 0.15 A/m であった．このときの粒子の速度を計算せよ．

$$2\pi b H = J \times \pi b^2 \longrightarrow J = \frac{2H}{b}$$

$$v = \frac{2\pi a^3 J}{q} = \frac{2\pi a^3}{q} \times \frac{2H}{b}$$

$$= \frac{2\pi \times 1^3}{3\times10^{-6}} \times \frac{2\times0.15}{0.01} = 6.28\times10^7$$

答　6.28×10^7 m/s

２．真空中において，x 方向成分のみを有する電界が距離 x [m]とともに $E = -E_D \dfrac{x}{D}$ [V/m]で変化する．また，$x = a$ [m]の位置の電位が $V = 0$ [V]であるとき，次の問に答えよ．（各５点）

（１）x の位置の電位を計算せよ．

$$V = \int_a^x -E\,dx = \int_a^x E_D \frac{x}{D}\,dx$$

$$= \frac{E_D}{D}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^x = \frac{E_D}{2D}(x^2 - a^2)$$

答　$\dfrac{E_D}{2D}(x^2 - a^2)$ [V]

（２）x の位置の電荷密度を計算せよ．

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = \varepsilon_0\left(-\frac{E_D}{D}\right)$$

答　$-\dfrac{\varepsilon_0 E_D}{D}$ [C/m³]

３．電位が $V = ax^3 + by^2z$ [V]で与えられるとき，次の問に答えよ．（各５点）

（１）電界の x, y, z 成分 E_x，E_y，E_z を，それぞれ計算せよ．

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -3ax^2$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2byz$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -by^2$$

$E_x =$ $-3ax^2$ [V/m]

$E_y =$ $-2byz$ [V/m]

$E_z =$ $-by^2$ [V/m]

（２）電荷密度を計算せよ．

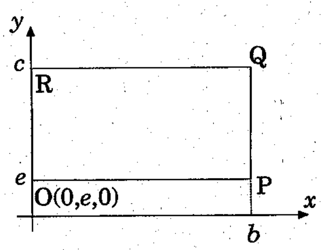
$$\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$= \varepsilon_0(-6ax - 2bz)$$

$$= -2\varepsilon_0(3ax + bz)$$

答　$-2\varepsilon_0(3ax + bz)$ [C/m³]

４．ベクトル $\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{H} = ay\boldsymbol{i}$ で表されるとき，長方形 OPQRO の中を通る電流を，アンペアの周回積分の法則から計算せよ．ただし，O 点の座標は$(0, e, 0)$，P 点の座標は$(b, e, 0)$，Q 点の座標は$(b, c, 0)$，R 点の座標は$(0, c, 0)$，また a, b, c は定数である．



$$I = \int_{OPQRO} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{OP} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{PQ} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{QR} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{RO} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$= \int_0^b H_x\,dx + \int_e^c H_y\,dy + \int_b^0 H_x\,dx + \int_c^e H_y\,dy$$

$$= \int_0^b ae\,dx + 0 + \int_b^0 ac\,dx + 0$$

$$= aeb - acb = ab(e - c)$$

答　$ab(e-c)$ [A]

February 10, 2009　No.____　氏名________________

5．時間 t [s]とともに z 方向へ進む電磁波の電界ベクトルが x 成分のみを有し，その大きさが $E_x = 2.5\times10^{-2}\sin(1.5\times10^9 t - 6.0z)$ [V/m] で与えられるとき，次の問に答えよ．

（1）この電磁波の周波数を計算せよ．(5点)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1.5\times10^9}{2\pi} = 2.39\times10^8$$

答　2.39×10^8 Hz

（2）この電磁波の波長を計算せよ．(5点)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6} = 1.05$$

答　1.05 m

（3）この電磁波の伝搬速度を計算せよ．(5点)

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1.5\times10^9}{6} = 2.5\times10^8$$

答　2.5×10^8 m/s

（4）$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ の関係から，この電磁波の磁束密度のベクトル $\boldsymbol{B}$ の微分 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ の x, y, z 成分の振幅（最大値）$\dot{B}_{xm}, \dot{B}_{ym}, \dot{B}_{zm}$ をそれぞれ計算せよ．（単位は不要．）(6点)

$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\nabla\times\mathbb{E} = -\begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\mathbb{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbb{k}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -2.5\times10^{-2}\times(-6)\cos(1.5\times10^9 t - 6z)$$

$$= 0.15\cos(1.5\times10^9 t - 6.0z)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$\dot{B}_{xm} =$ 0

$\dot{B}_{ym} =$ 0.15

$\dot{B}_{zm} =$ 0

6．磁界のベクトルが次式で表されるとき，電流密度の x, y, z 成分 J_x, J_y, J_z をそれぞれ計算せよ．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ [m] である．(各7点)

（1）$\boldsymbol{H} = A(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$ [A/m]

$$\mathbb{J} = \nabla\times\mathbb{H} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -Ay & Ax & 0 \end{vmatrix} = \mathbb{i}\left[-\frac{\partial}{\partial z}(Ax)\right] + \mathbb{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(-Ay)\right] + \mathbb{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Ax) - \frac{\partial}{\partial y}(-Ay)\right]$$

$$= \mathbb{k}(A+A) = 2A\mathbb{k}$$

$J_x =$ 0 [A/m²]

$J_y =$ 0 [A/m²]

$J_z =$ 2A [A/m²]

（2）$\boldsymbol{H} = A\frac{(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})}{r^2}$ [A/m]

$$\mathbb{J} = \nabla\times\mathbb{H} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{i}\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \mathbb{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \mathbb{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{x}{x^2+y^2}\right) = A\frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= A\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-A\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -A\frac{(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)}$$

$$= -A\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}$$

$$\therefore J_z = A\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + A\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$J_x =$ 0 [A/m²]

$J_y =$ 0 [A/m²]

$J_z =$ 0 A [A/m²]

7．β 線（電子 $-e$ [C]）をあらゆる方向へ一様に放射し，そのために球の電荷 Q が時間 t [s]とともに $Q=\alpha t$ [C]で変化している．次の問に答えよ．
　ただし，電流および電流密度は，球の中心から離れる方向にあるときを正とせよ．(各5点)

（1）β 線による伝導電流 I_C を計算せよ。

$$I_c = -\frac{dQ}{dt} = -\alpha$$

答　$-\alpha$ [A]

（2）1秒間に放出される電子の数を計算せよ。

$$I_c = -Ne \qquad N = -\frac{I_c}{e} = -\frac{-\alpha}{e} = \frac{\alpha}{e}$$

答　$\frac{\alpha}{e}$ [個/s]

（3）球の中心からの距離が r [m]の位置における電束密度を計算せよ。

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{\alpha t}{4\pi r^2} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

答　$\frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{\alpha t}{4\pi r^2}$ [C/m²]

（4）球の中心からの距離が r [m]の位置における，変位電流密度 J_D を計算せよ。

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\alpha}{4\pi r^2}$$

答　$\frac{\alpha}{4\pi r^2}$ [A/m²]

（5）伝導電流密度 J_C と変位電流密度 J_D の和を計算し，0となることを示せ。

$$J_C = \frac{I_c}{4\pi r^2} = -\frac{\alpha}{4\pi r^2}$$

$$\therefore J_C + J_D = 0$$

電気電子工学科３年　電気磁気学　後期期末再試験　1/2
（石井 良博担当）

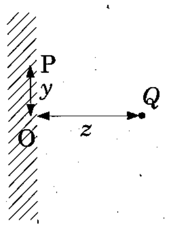
/100

February 20, 2009　No.____　氏名________________

注意１．　単位を明記すること．
注意２．　結果に至るまでの過程を明記すること．

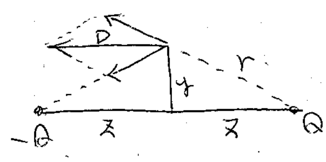
真空の誘電率　$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ [F/m]
真空の透磁率　$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ [H/m]

１．右の図のように，点電荷 Q [C]が導体の平面に向かって，速度 v [m/s]で運動している．（点電荷が導体表面に衝突する位置を O 点とする．）点電荷と導体平面までの距離が z [m]のときについて答えよ．（各７点）



（１）O 点から導体の表面に沿って y [m]離れた P 点における電束密度を計算せよ．ただし，左向きの場合を＋とせよ．（影像電荷を考慮することを忘れないこと．）

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}\times\frac{2z}{r}$$



$$= \frac{Qz}{2\pi r^3}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi(z^2+y^2)^{3/2}}$$

答　$\dfrac{Qz}{2\pi(y^2+z^2)^{3/2}}$ [C/m²]

（２）O 点における変位電流密度を計算せよ．ただし，左向きの場合を＋とせよ．

$y=0$ より，$D = \dfrac{Qz}{2\pi z^3} = \dfrac{Q}{2\pi z^2}$

$$J = \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{-Q}{\pi z^3}\times(-v)$$

$$= \frac{Qv}{\pi z^3}$$

答　$\dfrac{Qv}{\pi z^3}$ [A/m²]

（３）P 点における磁界の大きさを計算せよ．ただし，$z >> y$ とする．

$$2\pi y H = \pi y^2 J$$

$$H = \frac{\pi y^2 J}{2\pi y} = \frac{Jy}{2} = \frac{y}{2}\,\frac{Qv}{\pi z^3}$$

答　$\dfrac{Qyv}{2\pi z^3}$ [A/m]

（４）P 点における磁界の向きを⊙あるいは⊗の記号で答えよ．

答　⊗

２．真空管において，陰極からの距離 x [m]の位置の電界が $E = -E_D(x/D)^{1/3}$ [V/m]で与えられるとき，次の問に答えよ．（各７点）

（１）x の位置の電位を計算せよ．ただし，電位の基準を陰極とする．

$$V = \int_0^x -E\,dx = \int_0^x E_D\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{3}{4}E_D\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{4}{3}}\times D$$

答　$\dfrac{3}{4}E_D D\left(\dfrac{x}{D}\right)^{\frac{4}{3}}$ [V]

（２）x の位置の電荷密度を計算せよ．

$$\rho = \varepsilon_0\frac{dE}{dx} = -\varepsilon_0 E_D\left(\frac{x}{D}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{D}$$

答　$-\dfrac{\varepsilon_0 E_D}{3D}\left(\dfrac{x}{D}\right)^{-\frac{2}{3}}$ [C/m³]

３．電位が $V = ax^3y + b\sin cz$ [V]で与えられるとき，次の問に答えよ．（各７点）

（１）電界の x, y, z 成分 E_x，E_y，E_z を，それぞれ計算せよ．

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -3ax^2y$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ax^3$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -bc\cos cz$$

E_x = $-3ax^2y$ [V/m]
E_y = $-ax^3$ [V/m]
E_z = $-bc\cos cz$ [V/m]

（２）電荷密度を計算せよ．

$$\rho = \varepsilon_0\nabla\cdot E = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$= \varepsilon_0(-6axy + 0 + bc^2\sin cz)$$

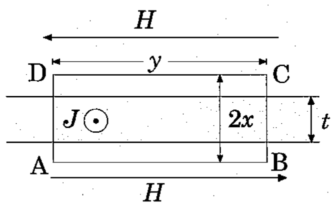
$$= \varepsilon_0(-6axy + bc^2\sin cz)$$

答　$\varepsilon_0(-6axy + bc^2\sin cz)$ [C/m³]

電気電子工学科３年　電気磁気学　後期期末再試験　　2/2
（石井 良博担当）

February 20, 2009　No.____　氏名________________

4．図のような厚さ t [m]の無限に広い導体の板が x 軸に垂直に置かれ，電流密度 J [A/m^2]の電流が z 方向に流れているとき，この電流による磁界の大きさを，次の手順にしたがって計算せよ．（各７点）



（１）ループ ABCDA に沿う磁界の周回積分を計算せよ．（対称性により，x の正負の領域における磁界の大きさは等しい．これを H とおく．）

$$\oint_{ABCDA} H\cdot ds = \int_{AB} H\cdot ds + \int_{BC} H\cdot ds + \int_{CD} H\cdot ds$$

$$+ \int_{DA} H\cdot ds = Hy + 0 + Hy + 0$$

$$= 2Hy$$

答　$2Hy$ [A]

（２）$2x > t$ の場合について，アンペアの周回積分の法則を用いて，磁界 H の大きさを計算せよ．

$$2Hy = ytJ$$

$$H = \frac{Jt}{2}$$

答　$\frac{Jt}{2}$ [A/m]

（３）$2x < t$ の場合について，アンペアの周回積分の法則を用いて，磁界 H の大きさを計算せよ．

$$2Hy = y\cancel{x}^{2x}J$$

$$H = \frac{Jx}{\cancel{2}}$$

答　$\frac{Jx}{\cancel{2}}$ [A/m]

5．振幅 150 μA/m，周波数 200 MHz，波長 1.5 m で，時間 t [s]とともに z 方向へ進む電磁波について次の問に答えよ．

（１）この電磁波を表す式を書け．（各７点）

答　$H = 150\times10^{-6}\sin\left(2\pi\times200\times10^{6}t - \frac{2\pi}{1.5}z\right)$ [A/m]

（２）磁界ベクトルが y 成分のみであるとき，$\mathrm{rot}\,H = \frac{\partial D}{\partial t}$ の関係から，この電磁波の電束密度のベクトル $\boldsymbol{D}$ の微分 $\frac{\partial D}{\partial t}$ の x, y, z 成分の振幅（最大値）$\dot{D}_{xm}, \dot{D}_{ym}, \dot{D}_{zm}$ をそれぞれ計算せよ．（単位は不要．）（８点）

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla\times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)$$

$$= i\left(+\frac{2\pi}{1.5}\times150\times10^{-6}\right.$$

$$\left.\times\cos\left(2\pi\times200\times10^{6}t - \frac{2\pi}{1.5}z\right)\right)$$

$$+ 0k$$

$\dot{D}_{xm} =$ $2\pi\times10^{-4}$

$\dot{D}_{ym} =$ 0

$\dot{D}_{zm} =$ 0

6．磁界のベクトルが $\boldsymbol{H} = A\frac{(-yi + xj)}{r}$ で表されるとき，電流密度の x, y, z 成分 J_x, J_y, J_z をそれぞれ計算せよ．ただし，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [m] である．（８点）

$$J = \nabla\times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\underbrace{\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)}_{=0} + j\underbrace{\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)}_{=0} + k\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = A\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= A\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = A\frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-A\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -A\frac{x^2}{r^3}$$

$$\therefore J = k\left[A\frac{y^2}{r^3} - \left(-A\frac{x^2}{r^3}\right)\right] = kA\frac{x^2+y^2}{r^3}$$

$$= kA\frac{r^2}{r^3} = k\frac{A}{r}$$

$J_x =$ 0 [A/m^2]

$J_y =$ 0 [A/m^2]

$J_z =$ A/r [A/m^2]

電気電子工学科３年　電気磁気学　学年末試験（石井 良博担当）1/2

February 20, 2007　　No.____　氏名________________

/100

注意１．　単位を明記すること。

注意２．　結果に至るまでの過程を明記すること。

真空の誘電率　$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12} = 1/(4\pi\times9\times10^{9})$ [F/m]

真空の透磁率　$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ [H/m]

１．誘電率がε [F/m] の誘電体の中で，電界の x, y, z 成分が，それぞれ $E_x=Cx$, $E_y=Cy$, $E_z=0$ [V/m]で表されるとき，座標（x, y, z）の位置の電荷密度を計算せよ。ただし，C は定数。

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \mathrm{div}\,E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= C + C = 2C$$

4

答　$\rho = 2\varepsilon C$ [C/m³]

２．真空管において，陰極からの距離 x [m]の位置の電界が $E = -E_D(x/D)^{1/3}$ [V/m]で与えられるとき，

（１）x の位置の電位を計算せよ．ただし，電位の基準を陰極とする．

$$V = -\int_0^x -E_D\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{1}{3}}dx = E_D\left[\frac{3D}{4}\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{4}{3}}\right]_0^x$$

4

$$= \frac{3}{4}E_D D\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{4}{3}} \quad [V]$$

答

（２）x の位置の電荷密度を計算せよ．

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{dE}{dx} = -\frac{1}{3}\,\frac{E_D}{D}\left(\frac{x}{D}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

4

$$\rho = -\frac{\varepsilon E_D}{3D}\left(\frac{x}{D}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad [C/m^3]$$

答

３．時間 t [s]の経過とともに，真空中を y [m]方向に進む電磁波の電界の z 成分が $E_z=2\times10^{-6}\times\sin(3\pi\times10^{9}t-10\pi y)$ [V/m]で表されるとき，次の問に答えよ。

（１）電界の振幅を答えよ。

4

答　2×10^{-6} [V/m]

（２）この電磁波の波長を計算せよ。

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2$$

4

答　0.2 m

（３）この電磁波の周波数を計算せよ。

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi\times10^{9}}{2\pi} = 1.5\times10^{9}\ \mathrm{Hz}$$

4

答

（４）この電磁波の速度を計算せよ。

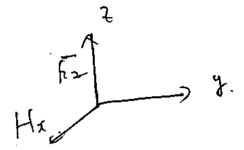
$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{3\pi\times10^{9}}{10\pi} = 3\times10^{8}$$

4

答　3×10^{8} m/s

（５）電磁波の磁界を表す式を導け。

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E = \sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-9}}}\,E$$



6

$$= 5.31\times10^{-9}\sin(3\pi\times10^{-9} - 10\pi y)$$

[A/m]

答

(28)

３．誘電率ε [F/m]，透磁率μ [H/m]の物質の中を進む電磁波が次式で表されるときについて次の問に答えよ。

$E_x=E_m\sin(\omega t-\beta z)$,　$E_y=E_z=0$ [V/m]

$H_y=H_m\sin(\omega t-\beta z)$,　$H_x=H_z=0$ [A/m]

（１）$\nabla\times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$ を満たすための条件を導け。

$$\nabla\times E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = j\frac{\partial E_x}{\partial z} - k\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

4

$$= j(-\beta)E_m\cos(\omega t-\beta z)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t} = -j\,\omega\mu H_m\cos(\omega t-\beta z)$$

答　$\therefore\ \beta E_m = \omega\mu H_m$

（２）$\nabla\times H = \dfrac{\partial D}{\partial t}$ を満たすための条件を導け。

$$\nabla\times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = k\frac{\partial H_y}{\partial x} - i\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$= +i\,\beta H_m\cos(\omega t-\beta z)$$

4

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i\,\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} = i\,\omega\varepsilon E_m\cos(\omega t-\beta z)$$

答　$\therefore\ \beta H_m = \omega\varepsilon E_m$

（３）(1), (2)の結果から，電波が伝わる速さが $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ [m/s]であることを示せ。

$$\beta^2 E_m H_m = \omega^2\varepsilon\mu H_m E_m$$

4

$$\frac{\omega^2}{\beta^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \qquad \therefore\ v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

（４）FM いるかは 80.7 MHz の電波で放送している。この電波の空気中（真空中）での波長を計算せよ。

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{3\times10^{8}}{80.7\times10^{6}}$$

4

$$= 3.72\ \mathrm{m}$$

答

（５）内外の導体の間が比誘電率 4，比透磁率 1 の誘電体で充されている同軸ケーブルが地球を１周している。同軸ケーブルの一端には抵抗が接続されている。他端を電池に接続するとき，抵抗に電流が流れ始めるのは，何秒後か？答えよ。ただし，地球の１周を４万 km とする。

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{3\times10^{8}}{\sqrt{4}} = 1.5\times10^{8}$$

4

$$t = \frac{l}{v} = \frac{4\times10^{7}}{1.5\times10^{8}} = 0.267\ 秒$$

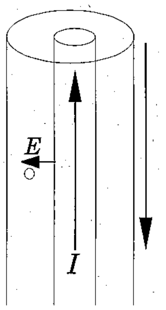
答

(26)

電気電子工学科３年　電気磁気学　学年末試験（石井 良博担当）2/2

February 20, 2007　　No.____　氏名____________

4．内外の導体の半径がそれぞれ，a, b [m] の同軸ケーブルがある。内外の導体の間は、誘電率ε [F/m]，透磁率μ_0 [H/m] の誘電体で充されている。内外の導体に、それぞれ互いに反対向きに同じ大きさの電流が導体の表面を流れているとき，中心軸から r [m] の位置の磁界は $H=\alpha/r$ [A/m]，電界の大きさが $E=\beta/r$ [V/m]で方向が外向きであった。導体に抵抗はないものとして，以下の問いに答えよ。



（1）内外の導体に流れている電流 I を計算せよ.

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\alpha}{r}$$

4

答　$I = 2\pi\alpha$ [A]

（2）外側の導体を基準とした内側の導体の電位 V を計算せよ.

$$V = \int_b^a -E\,dr = \int_b^a -\frac{\beta}{r}\,dr$$

4

$$= \beta \ln\frac{b}{a} \quad [\mathrm{V}]$$

答

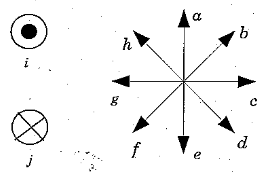
（3）中心軸から r [m] の位置のポインティング・ベクトル S の大きさを計算せよ.

$$S = EH = \frac{\alpha}{r} \times \frac{\beta}{r} = \frac{\alpha\beta}{r^2} \quad [\mathrm{W/m^2}]$$

4

答

（4）図１に、内外の導体の電流の向きを示している。○印は内外の導体の間に位置している。この位置の磁界 H およびポインティング・ベクトル S の向きを a～j の中から選べ。(完全解答)



4

H　i　　S　a

（5）同軸ケーブルの断面を１秒間に通過するエネルギーの大きさ P をポインティング・ベクトルから計算し，$P = IV$ となることを示せ.

$$P = \int_a^b S \times 2\pi r\,dr = \int_a^b \frac{\alpha\beta}{r^2} \times 2\pi r\,dr$$

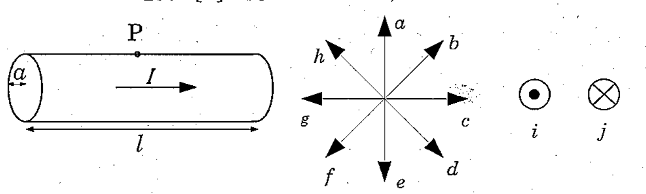
4

$$= 2\pi\alpha\beta \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= 2\pi\alpha\beta \ln\frac{b}{a} = IV$$

答

5．断面が半径 a [m]の円形，長さ l [m]，抵抗が R [Ω]の抵抗線がある。これに電流 I [A]が流れているとき，



(20)

（1）抵抗線の表面（P 点）における磁界の大きさを計算せよ.

4

答　$H = \dfrac{I}{2\pi a}$ [A/m]

（2）P 点における電界の大きさを計算せよ.

$$E = \frac{V}{l} = \frac{RI}{l} \quad [\mathrm{V/m}]$$

4

答

（3）P 点におけるポインティング・ベクトルの大きさを計算せよ.

$$S = EH = \frac{RI^2}{2\pi a l} \quad [\mathrm{W/m^2}]$$

4

答

（4）P 点における電界，磁界，ポインティング・ベクトルの向きを a ～ j の中から選べ。

4

答　電界 c，磁界 i，ポインティング e

（5）１秒間に抵抗線の表面から流入するエネルギーの大きさ P をポインティング・ベクトルから計算し，$P = RI^2$ となることを示せ.

4　∴ $P = S \times 2\pi a l = RI^2$ [W]

6．磁界の x, y, z 成分が次式で表されるとき，電流密度の x, y, z 成分 J_x, J_y, J_z をそれぞれ計算せよ。ただし，A は定数である。

$$H_x = \frac{Ay}{\sqrt{x^2+y^2}}, H_y = \frac{-Ax}{\sqrt{x^2+y^2}}, H_z = 0 \quad [\mathrm{A/m}]$$

$$J = \nabla \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

6 ※

$$= -i \underbrace{\frac{\partial H_y}{\partial z}}_{=0} + j \underbrace{\frac{\partial H_x}{\partial z}}_{=0} + k\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -A \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= -A \frac{(x^2+y^2) - x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -A \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

同様に

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = A \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\therefore J = k(-A) \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= -k \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

J_x　0　[A/m]

J_y　0　[A/m]

J_z　$-\dfrac{A}{\sqrt{x^2+y^2}}$　[A/m]

26