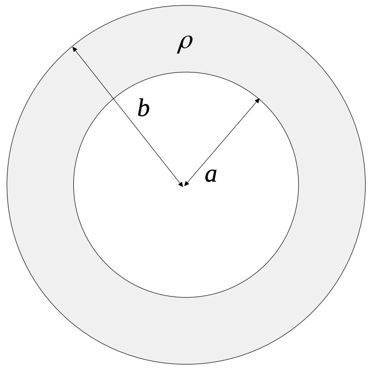
3E　電磁気学Ⅴ　問題

November 12, 2006

1．図に示すような半径 a [m]と半径 b [m]の球の間に，電荷密度 ρ [C/m^3]で電荷が一様に分布している。次の問に答えよ。



（1）中心軸から r [m]の距離における電界を計算せよ。

$r < a$　　0 [V/m]

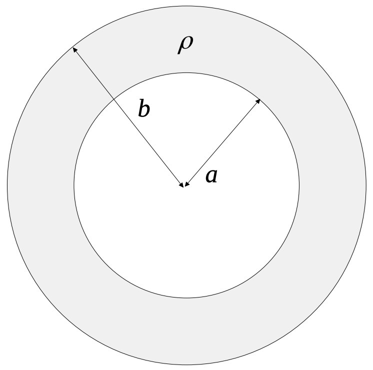
$a < r < b$　　$\dfrac{\rho\left(r^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}$ [V/m]

$r > b$　　$\dfrac{\rho\left(b^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}$ [V/m]

（2）中心軸から r $(< a)$ [m]の距離における電位を計算せよ。

$$\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(b^2 - a^2\right) \text{ [V]}$$

2．図に示すような半径 a [m]と半径 b [m]の円柱の間に，電荷密度 ρ [C/m^3]で電荷が一様に分布している。次の問に答えよ。



（1）中心軸から r [m]の距離における電界を計算せよ。

$r < a$　　$E=0$ [V/m]

$a < r < b$　　$E = \dfrac{\rho\left(r^2 - a^2\right)}{2\varepsilon_0 r}$ [V/m]

$r > b$　　$E = \dfrac{\rho\left(b^2 - a^2\right)}{2\varepsilon_0 r}$ [V/m]

（2）中心軸から r $(< a)$ [m]の距離における電位を計算せよ。ただし，半径 b [m]の円柱の表面を電位の基準とする。

$$V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - a^2 \ln\frac{b}{a}\right] \text{ [V]}$$

3．間隔 D [m]で平行な電極に電圧 V_D [V] が加えられているとき，陰極からの距離 x [m]のところの電位が $x^{4/3}$ に比例する。質量 m [kg]，電荷 $-e$ [C] の電子が，陽極に向かって陰極から初速 v_0 [m]で放射された。

（1）陰極から x [m] 離れた点まで移動したときの加速度を計算せよ。

$$\frac{4eV_D}{3mD}\left(\frac{x}{D}\right)^{1/3} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

（2）陰極から x [m] 離れた点まで移動したときの速度を計算せよ。

$$\sqrt{v_0^2 + \frac{2eV_D}{m}\left(\frac{x}{D}\right)^{4/3}} \text{ [m/s]}$$

（3）$v_0=0$ のとき，電子が陽極まで到達するのに必要な時間（電子走行時間）を計算せよ。

$$3D\sqrt{\frac{m}{2eV_D}} \text{ [s]}$$

4．半径 a [m]の球の中の電荷密度が球の中心からの距離 r [m]に反比例し，$\rho = A/r$ [C/m^3]で表されるとき，

（1）中心からの距離 r [m]の位置における電界を計算せよ。

$r < a$　　$\dfrac{A}{2\varepsilon_0}$ [V/m]

$r > a$　　$\dfrac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2}$ [V/m]

（2）球の中心の電位を計算せよ。

$$\frac{Aa}{\varepsilon_0} \text{ [V]}$$

5．面積 S [m^2]，厚さ t [m]，誘電率 ε [F/m]の誘電体で作った平行平板コンデンサにおいて，誘電体の中の電界が E [V/m]であるとき，

（1）誘電体の 1 m^3 あたりに蓄えられるエネルギーを計算せよ。

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

（2）このコンデンサに蓄えられている電荷を計算せよ。

$$\varepsilon ES \text{ [C]}$$

（3）電荷を一定に保ちながら，電極の間隔を Δx [m]縮めるとき，コンデンサに蓄えられるエネルギーの変化分を計算せよ。（増加する場合は＋，減少するときは－とせよ）

$$-\frac{1}{2}\varepsilon E^2 S\Delta x \text{ [J]}$$

（4）電極に働く力の大きさ（絶対値）を計算せよ。

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 S \text{ [N]}$$

6．半径 a [m]の導体球が真空中に置かれて，Q [C]の電荷で帯電しているとき，

（1）導体球の表面における電界を計算せよ。

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \text{ [V/m]}$$

（2）導体球の外側の空間に蓄えられているエネルギーを計算せよ。

$$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \text{ [J]}$$

（3）導体の半径が Δr [m]大きくなるとき，空間に蓄えられる静電エネルギーの変化分を計算せよ。（増加の場合は正，減少の場合は負とせよ。）

$$-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}\Delta r \text{ [J]}$$

（4）導体球の表面の 1 m^2 あたりに働く力を計算せよ。

$$\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4} \text{ [Pa]}$$

6．面積 S [m^2]の平行平板コンデンサの電極間に，厚さ t_1 [m]，誘電率 ε_1 [F/m]の誘電体と，厚さ t_2 [m]，誘電率 ε_2 [F/m]の誘電体が２層になっている。その境界面は電極と平行である。コンデンサに蓄えられている電荷が Q [C]であるとき，

（1）誘電率ε_1の誘電体の 1 m^3 あたりに蓄えられるエネルギーを計算せよ。

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{Q}{S}\right)^2 \ \ [\mathrm{J/m^3}]$$

（2）境界面が誘電率ε_1の誘電体の方へΔx [m]だけ変位するとき，コンデンサに蓄えられるエネルギーの変化分を計算せよ。（増加する場合は＋，減少するときは－とせよ）

$$\frac{Q^2}{2S}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\Delta x \ \ [\mathrm{J}]$$

（3）境界面に働く力の大きさを計算せよ。誘電率ε_1の誘電体の方へ向かう力を生とする。

$$\frac{Q^2}{2S}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right) \ \ [\mathrm{N}]$$

7．内外の導体の半径がそれぞれ、a, b [m]の同軸ケーブルがある。内外の導体の間は、誘電体（誘電率 ε [F/m]）で充されている。長さ 1 m あたり，内側の導体が Q [C/m]，外側の導体が$-Q$ [C/m]の電荷で帯電しているとき，

（1）中心軸から r [m]の位置の電界を計算せよ。

$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon r} \ \ [\mathrm{V/m}]$$

（2）同軸ケーブルの長さ 1 m あたりに蓄えられるエネルギーを計算せよ。

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a} \ \ [\mathrm{J/m}]$$

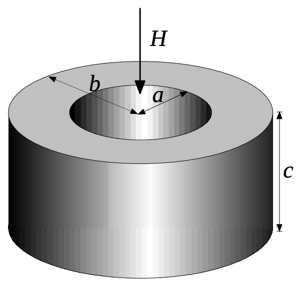
（3）内側の導体の半径がΔr [m]大きくなるとき，同軸ケーブルの長さ 1 m あたりに蓄えられる静電エネルギーの変化分を計算せよ。（増加する場合は＋，減少するときは－とせよ）

$$\frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon a}\Delta r \ \ [\mathrm{J/m}]$$

（4）内側の導体の面積 1 m^2 あたりに働く力を計算せよ。

$$\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon a^2} \ \ [\mathrm{Pa}]$$

8．右図のような抵抗率ρ [Ω･m]の導体がある。中空の部分に実効値 H [A/m]，周波数 f [Hz]の交流磁界を加えるときの，導体に流れる電流を計算したい。



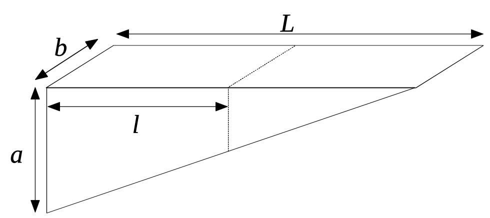
（1）導体の抵抗を計算せよ。

$$\frac{2\pi\rho}{c\ln(b/a)} \ \ [\Omega]$$

（2）起電力（実効値）を計算せよ。

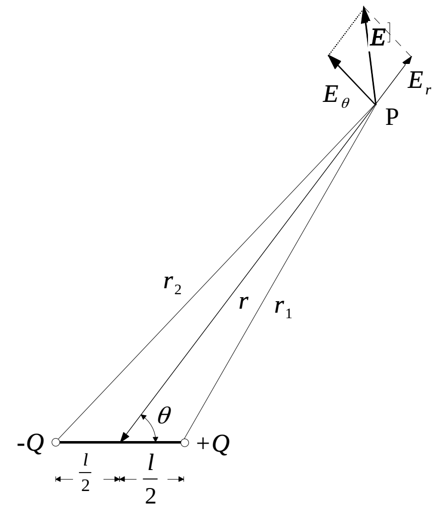
$$2\pi f\mu_0\pi a^2 H \ \ [\mathrm{V}]$$

9．図のような抵抗率ρ [Ω･m]の導体でできた直角三角形の板を長さ l [m]で切り，台形の板とした。その切り口と，$a\times b$ の底面に電極をつけるとき，抵抗を計算せよ。



$$\frac{\rho L}{ab}\ln\frac{L}{L-l} \ \ [\Omega]$$

10．図に示すような，電気双極子の中心から r [m]の位置の電位と電界を計算せよ。ただし，$r >> l$ である。



（1）r_1 と r_2を，r, l, θ で表せ。

$$r_1 = r-\frac{l}{2}\cos\theta \ \ [\mathrm{m}],\quad r_2 = r+\frac{l}{2}\cos\theta \ \ [\mathrm{m}]$$

（2）P 点の電位は次のように表されることを示せ。

$$V=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\ [\mathrm{V}]$$

ここに，$p=Ql$ は電気双極子モーメントである。

（3）P 点の電界の r 成分を計算せよ。

$$\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\ [\mathrm{V/m}]$$

（4）P 点の電界のθ 成分を計算せよ。

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\ [\mathrm{V/m}]$$

11．電位が $V=A(a^2-r^2)$ [V]で与えられるとき，次の問に答えよ。ただし，r は原点からの距離で，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ [m]で表される。

（1）電界の x 成分を計算せよ。

$2Ax$ [V/m]

（2）電界の大きさを計算せよ。

$2Ar$ [V/m]

12．電位が $V=\dfrac{B}{r}-Cz$ [V]で与えられるとき，次の問に答えよ。ただし，r は原点からの距離で，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ [m]で表される。電界の x，y，z 成分を計算せよ。

$$E_x=\frac{Bx}{r^3}\ [\mathrm{V/m}],\quad E_y=\frac{By}{r^3}\ [\mathrm{V/m}],\quad E_z=\frac{Bz}{r^3}+C\ [\mathrm{V/m}],$$

13．内外の導体の半径が a, b [m]，導体の間の誘電体の誘電率ε [F/m]の同軸ケーブルにおいて，中心軸から r [m]離れた位置の電束密度が時間 t の関数として $D=(A/r)\sin\omega t$ [C/m^2]で与えられるとき，

（1）内側の導体（導線）の長さ 1 m あたりの電荷を計算せよ。

$2\pi A\sin\omega t$ [C]

（2）中心軸から r [m]離れた位置において，内側の導体（導線）から外側の導体へ向かう変位電流密度を計算せよ。

$$\frac{\omega A}{r}\cos\omega t\ [\mathrm{A/m^2}]$$

（3）内側の導体（導線）から外側の導体へ向かう，同軸ケーブルの長さ 1 m あたりの変位電流を計算せよ。

$2\pi\omega A\cos\omega t$ [A]

14．半径 a [m]の球からベータ線として，電子（電荷 $-e$ [C]）が 1 秒間に N 個放射されている。$t=0$ [s]において球の電荷は 0 [C]であるとして次の問に答えよ。

（1）t 秒後の球の電荷を計算せよ。

Net [C]

（２）そのとき，球の中心から r (> a)[m]の電束密度を計算せよ。

$$\frac{Net}{4\pi r^2}\ [\mathrm{C/m^2}]$$

（３）球の中心から r [m]離れた位置における変位電流密度を計算せよ。球の中心から遠ざかる方向を正とする。

$$\frac{Ne}{4\pi r^2}\ [\mathrm{A/m^2}]$$

（４）電子の流れによる，球の中心から r [m]離れた位置における伝導電流密度を計算せよ。球の中心から遠ざかる方向を正とする。

$$-\frac{Ne}{4\pi r^2}\ [\mathrm{A/m^2}]$$

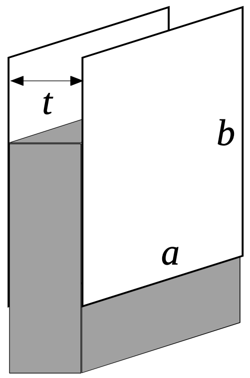
15. q [C]の電荷を有する粒子が x 軸に沿って速度 v [m/s]で運動している。x 軸上の O 点から粒子の距離が x [m]のとき,

（１）O 点における変位電流密度を計算せよ。

$$\frac{qv}{2\pi x^3}\ [\mathrm{A/m^2}]$$

（２）O 点から y 軸方向へ a [m]離れた位置における磁界を計算せよ。ただし，$a \ll x$ とする。

$$\frac{qva}{4\pi x^3}\ [\mathrm{A/m}]$$



16. 右図のように，辺の長さが a, b [m]の２枚の導体板の間に，厚さ t [m]，誘電率 ε [F]，質量 m [kg]の誘電体が挿入されている平行平板コンデンサを考える。導体板と誘電体の間に隙間はない。導体板の間に V [V]の電圧を加える。誘電体がΔx [m]だけ上昇するとき，次の問に答えよ。ただし。重力加速度を g [m/s²]とする。

（１）コンデンサに蓄えられるエネルギーの増加分を計算せよ。

$$\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{V^2}{t}a\Delta x\ [\mathrm{J}]$$

（２）誘電体と接している導体板の部分の電荷密度σと接していない部分の電荷密度σ_0を V で表し，コンデンサに蓄えられる電荷の増加分を計算して，$\Delta Q=(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{V}{t}a\Delta x$ [C]となることを示せ。

$$\sigma=\frac{\varepsilon V}{t}\ [\mathrm{C/m^2}],\qquad \sigma_0=\frac{\varepsilon_0 V}{t}\ [\mathrm{C/m^2}]$$

（３）電圧源からコンデンサに流れ込むエネルギーを計算せよ。

$$(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{V^2}{t}a\Delta x\ [\mathrm{J}]$$

（４）電圧源からコンデンサに流れ込むエネルギーの一部は誘電体を持ち上げるエネルギーとなり，残りはコンデンサに蓄えられると考えられる。エネルギー保存則から，誘電体が落ちないように保持するために電極の間に加える電圧をを計算し，$V=\sqrt{\frac{2mgt}{(\varepsilon-\varepsilon_0)a}}$ [V]となることを示せ。ただし，誘電体と導体板の間の摩擦を無視する。

3E　電磁気学IV　問題

September 6, 2006

1．半径が a [m]の導線が地面（導体平面）から高さ h [m]で平行に張られており、電流 I[A]が流れている。ただし、表皮効果により、電流は導線の表面のみを流れている。

⑴ 導線の真下で, 地面から高さ y [m]($0 < y < h$)のところの磁界を計算せよ.

⑵ 長さ 1 m あたりの自己インダクタンスを計算せよ。（地面の下には磁束はできない。）

2．内外の導体の半径がそれぞれ、a, b [m] の同軸ケーブルがある. 内外の導体の間には、誘電率ε [F/m], 透磁率μ_0 [H/m] の誘電体で充されている．内外の導体に、それぞれ互いに反対向きに同じ大きさの電流 I [A] が流れている．ただし，電流は導体の表面のみを流れると仮定する．同軸ケーブルの 1 m あたりの自己インダクタンスを計算せよ.

3．内外の導体の半径がそれぞれ、a, b [m] の同軸ケーブルがある．内外の導体の間は、誘電率ε [F/m], 透磁率μ_0 [H/m] の誘電体で充されている．内外の導体の間には電圧が加えられており，内外の導体には、それぞれ互いに反対向きに同じ大きさの電流 I [A] が流れている．また，内外の導体の間には電圧が加えられており，このために内外の導体は 1 m あたり，それぞれ$+Q$, $-Q$ [C]で帯電している。

（１）同軸ケーブルの中心軸からの距離が r [m]の位置の電界を計算せよ。($a < r < b$)

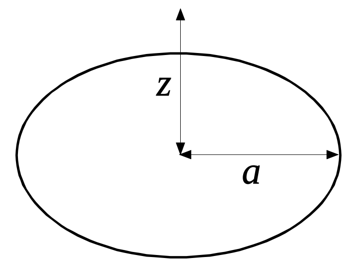
（２）内外の導体の間の電圧を計算せよ。

（３）同軸ケーブルの中心軸からの距離が r [m]の位置の磁界を計算せよ。($a < r < b$)

（４）同軸ケーブルの 1 m あたりの磁気エネルギーを計算せよ。

ただし，電流は導体の表面のみを流れる物とする。

（５）同軸ケーブルの 1 m あたりの自己インダクタンス計算せよ。

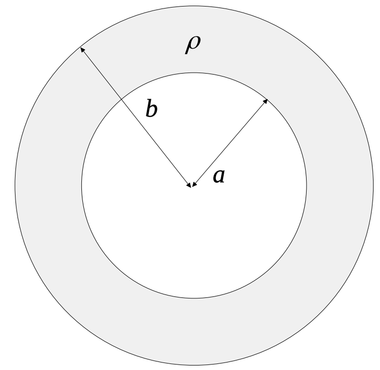


4．図のような半径 a [m]のリングが，電荷 Q [C]で一様に帯電している。中心軸に沿って中心から z [m]離れた位置を P 点とする。

（１）P 点における電位を計算せよ。

（２）P 点における電界を計算せよ。ただし，電界が z の増加する方向を向いているときの電界を正とする。

5．図に示すような半径 a [m]と半径 b [m]の円柱の間に，電荷密度ρ [C/m³]で電荷が一様に分布している。次の問に答えよ。



（１）中心軸から r [m]の距離における電界を計算せよ。

$r < a$

$a < r < b$

$r > b$

（２）中心軸から r ($< a$) [m]の距離における電位を計算せよ。ただし，半径 b [m]の円柱の表面を電位の基準とする。

6．$+Q$ [C/m]と$-Q$ [C/m]で帯電した２本の線が $2d$ [m]の間隔で張られている。

（１）２本の線の間の中心から正に帯電している線に向かって x [m]の距離の位置の電界を計算せよ。(正に帯電している線に向かう方向を正とする。)

（２）x [m]の距離の位置の電位を計算せよ。ただし，電位の基準を，２本の線の間の中心とする。